

# Метод связи каналов в теории экзогенных геофизических систем

Виктор Борисович СУРНЕВ<sup>1,2\*</sup>,  
Вера Борисовна ПЯТКОВА<sup>1</sup>,  
Дмитрий Владимирович ИСЛАМГАЛИЕВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Уральский государственный горный университет, Россия, Екатеринбург

<sup>2</sup> Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург

**Актуальность работы.** По оценкам специалистов Россия обладает весьма значительными запасами высоковязких нефтей (около 7 миллиардов тонн), добыча которой производится посредством теплового разогрева содержимого ловушки или пласта перегретым водяным паром с последующей откачкой получившегося флюида. Процесс добычи высоковязкой нефти, однако, является достаточно трудоёмким. По названным причинам разработка методов мониторинга добычи высоковязкой нефти актуальна.

**Цель работы.** Разработка теоретических основ сейсмического мониторинга процесса добычи высоковязкой нефти.

**Методология** рассматриваемой в данной статье теории основана на постулате о двухканальном характере процесса взаимодействия ограниченного объекта (системы) с внешним миром. Через первый канал производится воздействие на объект векторного волнового поля, в данной работе – это упругое волновое поле. Через второй канал производится воздействие на объект стационарного скалярного поля, в данной работе – это тепловое поле. Таким образом, рассматривается теория рассеяния упругих волн объектом, находящимся под воздействием внешнего скалярного (теплового) поля. Скалярное поле в материале объекта индуцирует предварительные упругие напряжения, которые фигурируют как отклик объекта на это воздействие. Вторичное тепловое поле, существующее во внешности объекта, не рассматривается. Таким образом, общая самосогласованная задача двухканального взаимодействия объекта с внешним полем подвергается процедуре расщепления каналов и сводится к рассеянию упругой волны объектом с материальными параметрами, функционально зависящими от внешнего теплового воздействия, то есть общая нелинейная физическая система с распределёнными параметрами “объект – волновое поле – скалярное поле” рассматривается как параметрическая система, что позволяет существенно упростить алгоритм и уменьшить требуемые для численного моделирования ресурсы. В качестве модельной задачи для теории, которую предполагается довести до практической реализации в виде алгоритма и комплекса вычислительных программ, выбрана важная для промысловой и разведочной геофизики задача сейсмического мониторинга состояния ловушки с высоковязкой нефтью при разогреве ловушки подводимым извне теплом. Авторы предполагают в дальнейшем обобщить теорию, разработать алгоритм и создать комплекс вычислительных программ электромагнитного мониторинга состояния объекта, находящегося под воздействием внешнего скалярного (теплового) поля, а также теорию взаимодействия объекта с внешним миром посредством нескольких каналов. Для более полного мониторинга процесса его математическую модель следует обобщить до существенно многоканального уровня, то есть рассмотреть математическую модель “объект – упругое волновое поле – электромагнитное волновое поле – тепловое поле – поле статического нагружения”. Обобщённая на несколько полей теория многоканального взаимодействия объекта с внешним миром может быть использована и для математического моделирования в других областях физики и техники, например, в дефектоскопии.

**Результаты.** В статье разработана теория индуцирования предварительных напряжений в материале изучаемого объекта под действием внешнего скалярного (теплового) поля. Получены новые математические выражения для параметрических зависимостей материальных параметров объекта от температуры. Приведена обобщённая форма интегрального аналога уравнения Липмана-Швингера для решения прямой задачи рассеяния упругих волн объектом с предварительными напряжениями, индуцированными в материале объекта посредством воздействия на него внешнего теплового поля.

**Ключевые слова:** рассеяния теория; упругие волны; сейсмические волны; предварительные напряжения; высоковязкие нефти; сейсмический контроль; математическое моделирование; Липмана-Швингера уравнение; интегральные уравнения.

## Введение

### Экзогенные параметрические системы как нулевое приближение метода связи каналов

Объектом исследования данной статьи является весьма общая математическая модель гетерогенной упругой среды, находящейся под воздействием внешних по отношению к рассматриваемому объёму среды возмущений, часть которых приводит к зависимости материальных параметров системы от внешних воздействий. Рассматривается гетерогенная среда, взаимодействующая с упругими волнами от внешнего по отношению к рассматриваемому её объёму источника. Практический интерес представляет случай, когда на исследуемый объём среды действует ещё внешнее дополнительное возмущение, приводящее к изменению материальных параметров заключённой в объёме среды. Таким возмущением может выступать, например, тепловой поток.

Уместно отметить, что исследуемая в статье математическая модель имеет большое значение как для геологии вообще, так и для геофизики в частности, например, для сейсмологии и динамической сейсморазведки. В качестве модельной задачи для рассматриваемой теории в данной статье выбрана задача сейсмического контроля процесса добычи высоковязкой нефти в промысловой геофизике. Объектом исследования является модель нефтяной ловушки с высоковязкой нефтью, взаимодействующей с внешними искусственными сейсмическим и тепловым полями.

С точки зрения общей теории систем, рассматриваемая в данной статье модель гетерогенной упругой среды, взаимодействующей с внешним упругим волновым полем, является моделью экзогенной параметрической системы с распределёнными структурными параметрами, взаимодействие которой с внешним миром осуществляется посредством двухканального процесса. Объектом исследования служит выделенный объём среды. Через условно первый канал осуществляется механическое взаимодействие объекта с внешним миром посредством падающих на объём среды упругих волн. Через условно второй канал осуществляется композиционное воздействие на структурные параметры системы посредством теплового потока извне. При этом физический смысл каналов может быть описан так:

\* [sournev@yandex.ru](mailto:sournev@yandex.ru)

 <https://orcid.org/0000-0001-6534-6668>

\*\*\* [vera.pytkova@m.ursmu.ru](mailto:vera.pytkova@m.ursmu.ru)

\*\*\* [dif1205@mail.ru](mailto:dif1205@mail.ru)

 <https://orcid.org/0000-0002-4222-9458>

1-й канал: на вход системы подается механическое воздействие (упругая волна), на выходе регистрируется также механический отклик (упругая волна);

2-й канал: на вход системы подается немеханическое воздействие (тепловой поток), на выходе регистрируется также немеханический отклик (тепловой поток).

С физической точки зрения, очевидно, что между обоими каналами взаимодействия существует обратная связь, следствием которой является необходимость решения, в общем случае математически нелинейной (самосогласованной) задачи нестационарной термомупругости.

Указанная задача является нелинейной и, следовательно, алгоритм ее решения достаточно сложен в реализации. По этой причине представляется оправданным ввести некоторые упрощающие предположения, а именно: для упрощения алгоритма численного моделирования уместно «разорвать связь» указанных каналов, отказавшись от самосогласованности и оставить только «одностороннюю связь», т. е. рассматривать связь, направленную от одного канала к другому, но не наоборот.

С физической точки зрения такую процедуру «расщепления каналов взаимодействия» можно оправдать, если каналы воздействия на исследуемый объект технически возможно подразделить условно на основной (сильный) канал и на вспомогательный (слабый) канал. Сильный канал «управляет», например, откликом системы как целого на внешнее механическое воздействие, а слабый канал «управляет» изменением структурных параметров системы под влиянием внешних воздействий немеханической природы и тем самым вносит «поправки», возможно, существенные, в механический отклик системы, причем немеханический отклик системы является весьма малым, не имеет существенного значения для наблюдателя и на выходе системы не регистрируется.

Описанная ранее процедура расщепления каналов взаимодействия системы с внешним миром может быть охарактеризована как нулевое приближение в методе связи каналов и переводит общую нелинейную математическую модель системы в класс параметрических моделей, что значительно упрощает разработку и реализацию алгоритмов расчетов. Таким образом, в рамках параметрической модели взаимодействие системы с внешним миром происходит через слабый и сильный каналы связи, а частичная самосогласованность учитывается посредством вводимых специальным образом процедур изменения параметров системы под действием слабого канала.

**Акценты и связь с предыдущими работами**

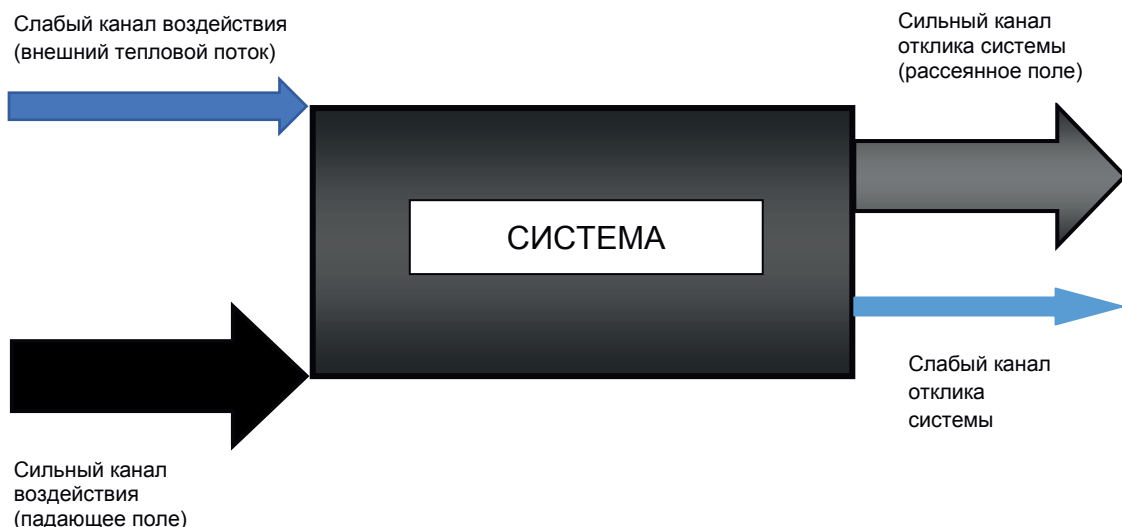
Описанную ситуацию иллюстрирует рис. 1, из которого видно, что на входе системы имеется два канала воздействия, а на выходе учитывается фактически один канал отклика.

Известно, что математическое моделирование исследуемого явления в общем случае подразделяется на три основных стадии [1]:

- 1) разработка математической модели объекта исследования;
- 2) разработка математической модели процесса эволюции объекта;
- 3) решение основной задачи исследования.

В данной статье внимание акцентировано в основном на первой и второй стадиях математического моделирования рассеяния упругих волн гетерогенной средой, испытывающей внешние воздействия немеханической природы, а именно, важнейшей для теоретического описания задачи элементарного акта рассеяния волн уединенной неоднородностью [2–4] с учетом возможного немеханического, в данном исследовании теплового воздействия.

Формально данная статья продолжает и развивает на новом уровне понимания механизма внешних воздействий на систему идеи предшествующей работы [4], в которой трактовалась теория взаимодействия предварительно напряженного упругого объекта с внешней средой. В работе [4], однако, физический механизм возникновения в материале рассеивающего объекта предварительных напряжений не конкретизировался, а сама теория была ограничена только линейным приближением, без каких-либо обоснований последнего. В данной работе без нарушения общности внимание акцентируется на одном из возможных вариантов физического механизма возникновения в материале рассеи-



**Рисунок 1. Каналы взаимодействия системы с внешним миром.**  
**Figure 1. Channels of interaction between the system and the outside world.**

вающего объекта предварительных напряжений – тепловом воздействии на объект, который реализуется на практике в некоторых задачах разведочной и промысловой геофизики. Построенный математический аппарат, трактуя отклик объекта на совместное воздействие – механическое и немеханическое – как двухканальный процесс легко обобщается на случай большего числа экзогенных воздействий на параметры объекта и может быть непосредственно использован также для описания других физических механизмов возникновения предварительных напряжений в материале объекта, следующих из общих законов термодинамики [1]. Таким образом, данная работа, будучи формально обобщением идей и методов работы [4], использует понятия и терминологию указанной работы, но является по существу полностью самостоятельным исследованием.

#### Пример экзогенной системы, актуальной для промысловой геофизики

В качестве обоснования актуальности и практической значимости модели гетерогенной среды, исследуемой в данной работе, приведем только один пример системы, взаимодействующей с внешней средой посредством двух каналов.

В работах [5–10] отмечается, что «в связи с исчерпанием запасов легких нефтей в мировой добыче в последние годы увеличивается доля трудноизвлекаемых нефтей с аномальными физическими свойствами, в частности с высокой вязкостью». Из приведенных в работе [5] данных следует, что такие нефти составляют десятую часть мировой добычи, которая ежегодно возрастает, и при сохранении темпов приращения добычи на существующем уровне прогнозируется увеличение добычи трудноизвлекаемой нефти в мире к 2030 г. в четыре раза. Там же указано, что Россия обладает весьма значительными запасами вязких нефтей, около 7 млрд т. Традиционными районами добычи таких нефтей являются Западная Сибирь, Северный Кавказ, Урало-Поволжье, Тимано-Печора, причем наряду с увеличением доли добычи трудноизвлекаемых нефтей с высокой вязкостью наблюдается увеличение глубины залегания продуктивных пластов, ухудшение коллекторов и усложнение геологического строения. Интерес к высоковязким нефтям увеличивается по мере роста цен на нефть и в связи с начавшимся периодом истощения многих крупных и мелких российских нефтяных месторождений. В работе [5] утверждается, что за счет разработки запасов вязких нефтей Россия могла бы ежегодно получать до 25–30 млн т нефти дополнительно.

Естественно, что техника добычи высовязкой нефти отличается от техники добычи легкой нефти. Не вдаваясь в подробности, отметим, что основным способом добычи высовязкой нефти является предварительный разогрев пласта или ловушки (слабый канал связи в нашей интерпретации) с последующей откачкой получающегося флюида с допустимой вязкостью [9]. Естественно, что процесс разогрева должен быть контролируемым. Одним из способов контроля является наблюдение аномальных геофизических полей, появляющихся в результате взаимодействия объекта с первичным полем, генерируемым искусственным внешним источником (сильный канал связи в нашей интерпретации). В качестве таких полей можно использовать традиционно применяемые в геофизике поля, а именно, сейсмическое или электромагнитное поле. В данной статье рассматривается случай взаимодействия изучаемого объема гетерогенной среды с сейсмическим полем, создаваемым искусственным управляемым источником, расположенным во внешности изучаемого объекта.

На рис. 2 приведена упрощенная схема контроля добычи высоковязкой нефти из нефтяной ловушки. Для разогрева высоковязкой нефти в ловушке используется вспомогательная (техническая) скважина, через которую в ловушку закачивается разогревающий флюид, как правило, водяной пар. Этот пар вырабатывается устройством, которое условно отмечено на рисунке как парогенератор. Пар закачивается в ловушку, разогревает нефть и в результате разогрева образуется «пузырь» разогретого флюида с вязкостью, допускающей откачку через скважину, обозначенную условно как «продуктовая». Весь процесс контролируется посредством регистрации приемником вторичного сейсмического поля, появляющегося в результате рассеяния первичного (падающего) поля ловушкой. Источником первичного поля является генератор, в качестве которого на рис. 2 изображен вибратор, излучающий гармонический сигнал (условно). Пунктирными и штрихпунктирными линиями условно показаны первичные сейсмические волны от источника – падающего поля, и вторичные сейсмические волны – поле, рассеянное ловушкой. Отметим, что рис. 2 является только иллюстрацией ситуации, имеющей место в практике добычи вязкой нефти, и ни в коей мере не претендует на статус технического проекта.

Отметим, что рассмотренный в этом пункте пример не является уникальным, но является наиболее представительным. Отметим также, что в качестве зондирующего поля можно использовать иные поля, например, электромагнитное поле. Причем в случае использования для зондирования электромагнитного поля удасться, по-видимому, избежать многих технических сложностей, связанных с генерацией первичного поля и интерпретацией вторичного (рассеянного) поля. Исследованию этого подхода будет посвящена следующая работа авторов.

Нетрудно видеть, что приведенный пример полностью соответствует описанной ранее процедуре расщепления каналов взаимодействия системы с внешней средой в ситуации, когда каналы взаимодействия можно подразделить на сильный и слабый (рис. 1).

#### Параметрическая зависимость материальных параметров объекта исследования от температуры

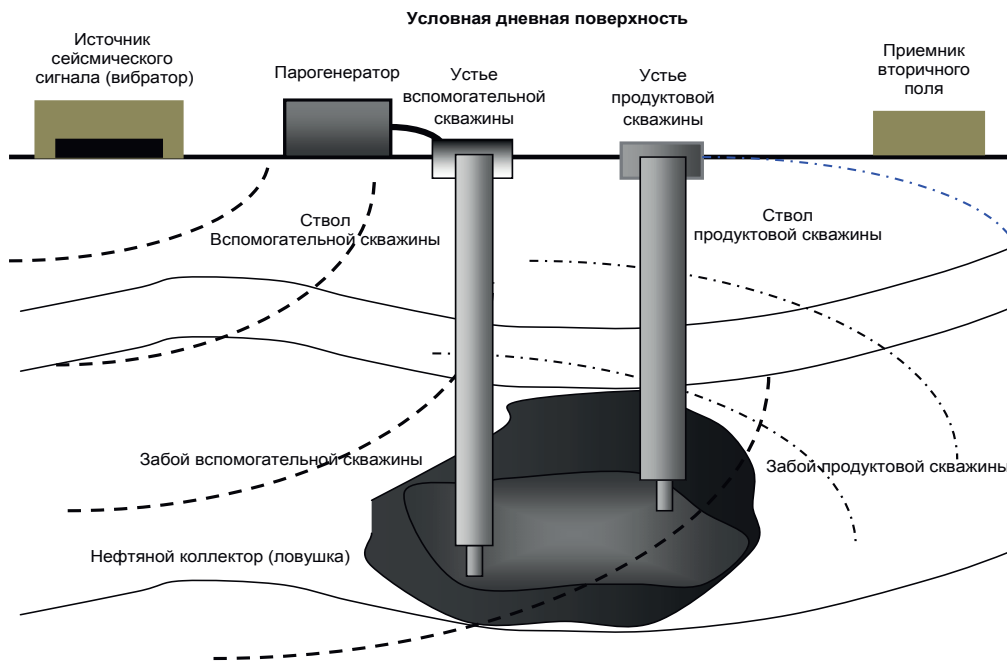
Параметрические модели экзогенных систем с сосредоточенными параметрами хорошо известны, например, параметрические зависимости элементов электрической цепи и их следствия описаны в работе [11], а работа [12] посвящена конкретному примеру математического моделирования температурной неустойчивости индуктивного измерительного преобразователя в электроразведке.

Напомним в связи с этим, что для расчетов электрических цепей в рамках параметрической модели для электрического сопротивления в достаточно широком диапазоне температур  $t \in [0, 600]^\circ\text{C}$  применяется установленная экспериментально температурная (параметрическая) зависимость вида [11]

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + k_R^{(1)} t + k_R^{(2)} t^2 + k_R^{(3)} t^3 (t - 100) \right], \quad (1)$$

где постоянные коэффициенты имеют следующие значения:

$$k_R^{(1)} = 3,9083 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad k_R^{(2)} = -5,775 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}, \quad k_R^{(3)} = -4,183 \times 10^{-12} \text{ }^\circ\text{C}^{-4}.$$



**Рисунок 2. Упрощенная схема сейсмического мониторинга добычи высоковязкой нефти.**  
**Figure 2. Simplified seismic monitoring of high-viscosity oil production.**

Известно, что в температурном диапазоне  $t \in [0, 300]^\circ\text{C}$  указанную зависимость можно заменить упрощенной формулой с квадратичной зависимостью

$$R(t) = R_0 [1 + k_R^{(1)}t + k_R^{(2)}t^2], \tag{2}$$

а в более «реалистичном» диапазоне температур  $t \in [-20, 60]^\circ\text{C}$  с высокой точностью справедлива линейная зависимость

$$R(t) = R_0 [1 + k_r(t - t_0)], \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что как функция, задаваемая формулой (1), так и более простые функции (2) и (3) на множествах своего определения  $[0, 600]$ ,  $[0, 300]$  и  $[-20, 60]$  соответственно являются многочленами и могут трактоваться как многочлены Тейлора для функции  $R = R(t)$  соответственно третьего, второго и первого порядков.

Действительно, физически оправданные допущения относительно поведения функции  $R = R(t)$  в малой окрестности отмеченной точки  $t_0 \in [0, b]^\circ\text{C}$ , принадлежащей допустимому с физической точки зрения промежутку  $(0, b)^\circ\text{C}$  изменения параметра (температуры), приводят нас к выводу о том, что эта функция является дифференцируемой функцией класса  $N$  [13], где  $N$  – натуральный порядок, значение которого выбирается исходя из условий физической допустимости. Так как дальше, основываясь на экспериментальных данных, будем предполагать, что физически достаточны для решения поставленных задач невысокие значения  $N$ , то целесообразно расширить класс исследуемых функций до  $N^\infty$  считая все функции дифференцируемыми «бесконечно», иными словами, столько раз, сколько требуется для решения данной задачи.

Основываясь на приведенных соображениях, будем придерживаться полевой концепции, согласно которой все математические выводы далее будут проводиться в рамках классической теории поля, одним из следствий которой является возможность представления функциональных зависимостей, входящих в математическую модель системы, формулой Тейлора или даже суммой ряда Тейлора. Такие функции в механике сплошной среды называются полевыми функциями [1].

Рассмотрим теперь параметрическую (параметр – температура) зависимость материальных параметров сплошной, в общем случае анизотропной упругой среды, которая является системой с распределенными параметрами. Более простой случай изотропной неоднородной упругой среды, когда среда характеризуется параметрами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и массовой плотностью, являющимися скалярными функциями температуры, может быть рассмотрен как частный случай изучаемой модели.

Как известно [1], идеальная сплошная упругая среда характеризуется упругими модулями, или модулями упругих податливостей, и массовой плотностью. В общем случае полностью анизотропной среды в модели линейной упругости (в данной статье рассматривается только модель физически линейной упругости) имеет место обобщенный закон Гука (далее просто закон Гука), являющийся линейным приближением в разложении функциональной зависимости

$$T_{ij} = T_{ij}(S_{kl}), \tag{4}$$

связывающей компоненты тензора напряжений  $T_{ij}$  и тензора деформаций  $S_{kl}$  в ряд Тейлора [...]. Это разложение имеет вид

$$T_{ij}(S_{kl}) = \left(T_{ij}\right)_{S_{kl}=0} + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}\right)_{S_{kl}=0} S_{kl} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{mn} \partial S_{kl}}\right)_{S_{kl}=0, S_{mn}=0} S_{kl} S_{mn} + \dots \tag{5}$$

Отметим, что в (5) использовано соглашение о суммировании: по дважды повторяющемуся индексу предполагается суммирование от 1 до 3. Это соглашение было введено Эйнштейном для индексов, повторяющихся один раз внизу и



один раз сверху. Мы далее используем его и для случая индексов, находящихся в одном положении. Кроме этого, для обозначения свертки тензоров будет использовано точка между компонентами соответствующих тензоров.

По определению сплошной упругой среды [1, 6] первоначальная конфигурация среды восстанавливается, когда перестают действовать внешние силы, поэтому

$$(T_{ij})_{S_{kl}=0} = 0, \tag{6}$$

Вводя обозначения для модулей упругости первого, второго и так далее порядков

$$c_{ijkl} = \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0}, c_{ijklmn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{mn} \partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0, S_{mn}=0}, \dots,$$

и учитывая (6), перепишем (5) в виде

$$T_{ij}(S_{kl}) = c_{ijkl} S_{kl} + c_{ijklmn} S_{kl} \cdot S_{mn} + \dots \tag{7}$$

Разложение (7) является основой так называемой геометрически нелинейной теории упругости [14], которая в данной статье рассматриваться не будет.

Учитывая, что в линейной теории упругости деформации выражаются через компоненты вектора смещения формулой

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right),$$

перепишем разложение (7), ограничиваясь линейными членами по деформациям, в следующем виде:

$$T_{ij}(S_{kl}) = c_{ijkl} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right) + c_{ijklmn} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^m}{\partial x^n} + \frac{\partial u^n}{\partial x^m} \right) + \dots = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} + \frac{1}{4} c_{ijklmn} \frac{\partial u^k}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial u^m}{\partial x^n} + \frac{1}{4} c_{ijklmn} \frac{\partial u^k}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x^m} + \frac{1}{4} c_{ijklmn} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u^m}{\partial x^n} + \frac{1}{4} c_{ijklmn} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x^m} + \dots \approx \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k}.$$

Используя соотношения симметрии для модулей упругости [15]

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, c_{ijkl} = c_{ijlk},$$

запишем для тензора напряжений следующее выражение

$$T_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} = \frac{1}{2} c_{ijlk} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} + \frac{1}{2} c_{ijlk} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} = \frac{1}{2} c_{ijlk} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} + \frac{1}{2} c_{ijlk} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} = c_{ijlk} \frac{\partial u^l}{\partial x^k}.$$

Таким образом, обобщенный закон Гука переписывается в известном виде [16]

$$T_{ij} = c_{ijlk} \frac{\partial u^l}{\partial x^k}. \tag{8}$$

Приведенные выше хорошо известные и многократно описанные в литературе тривиальные выкладки призваны помочь в понимании дальнейших преобразований и не несут, по крайней мере, пока новой информации.

В рамках идеологии многоканальности процесса закон Гука (8) по отношению к рассматриваемой экзогенной системе является материальным уравнением, описывающим одноканальный процесс в том смысле, что вспомогательный (слабый) канал взаимодействия системы и внешнего мира закрыт, то есть внешний тепловой поток в неоднородность вещественного состава, описывающую исследуемый объект, отсутствует (неоднородность не разогревается). При наличии слабого канала взаимодействия функциональная зависимость (8) должна быть обобщена и в простейшем случае может быть записана в виде

$$T_{ij}(\theta) = c_{ijlk}(\theta) \frac{\partial u^l}{\partial x^k}, \tag{9}$$

где  $\theta$  – абсолютная температура, которая в зависимости от используемой системы может быть выражена в соответствующих единицах.

Ранее мы приняли в качестве постулата, что все теоретические построения будут производиться в рамках классической теории поля, следствием которой является возможность представления функций, описывающих математическую модель изучаемой системы, рядом (формулой) Тейлора. Следуя принятой концепции, считаем, что компоненты тензора модулей упругости  $c_{ijkl}$  являются полевыми функциями и могут быть представлены в виде суммы ряда Тейлора:

$$c_{ijkl}(\theta) = c_{ijkl}(\theta_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \theta}(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 c_{ijkl}}{\partial \theta^2}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 + \dots \tag{10}$$

Постулируя существование референсного значения температуры  $\theta_0$  при нормальных условиях и полагая, что  $\theta_0 \equiv 0$ , заменим ряд Тейлора (10) рядом Маклорена:

$$c_{ijkl}(\theta) = c_{ijkl}(0) + \left( \frac{1}{1!} \right) \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \theta}(0) \theta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 c_{ijkl}}{\partial \theta^2}(0) \theta^2 + \dots \tag{11}$$

В формулах (10) и (11) величины  $\frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \theta}$  – это производные компонент тензора модулей упругости по температуре.

Разложение (11) можно переписать в виде:

$$c_{ijkl}(\theta) = c_{ijkl}(0) \left[ 1 + \frac{1}{c_{ijkl}(0)} \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial \theta}(0) \theta + \frac{1}{2! c_{ijkl}(0)} \frac{\partial^2 c_{ijkl}}{\partial \theta^2}(0) \theta^2 + \frac{1}{2! c_{ijkl}(0)} \frac{\partial^2 c_{ijkl}}{\partial \theta^2}(0) \theta^2 + \dots \right]. \quad (12)$$

Вводя обозначения

$$\beta_c^{p \text{ def}} = \frac{1}{k! c_{ijkl}(0)} \frac{\partial^p c_{ijkl}}{\partial \theta^p}(0), \quad (13)$$

перепишем разложение (12) в следующем виде:

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) \left[ 1 + \beta_c^{(1)} \theta + \beta_c^{(2)} \theta^2 + \dots \right]. \quad (14)$$

Вполне очевидно, что разложение (14) обобщает экспериментально установленные температурные зависимости вида (1) для элементов системы с сосредоточенными параметрами (электрической цепи) на упругую сплошную среду – систему с распределенными параметрами (параметры системы зависят от пространственных координат).

Теперь мы при помощи разложения (14) можем записать обобщенный закон Гука в форме, которая является основой дальнейших теоретических выводов. Для этого подставим в линейную связь напряжений с деформациями (9) разложение (14), в результате получим

$$T_{ij}(\theta) = c_{ijkl}(0) \left[ 1 + \beta_c^{(1)} \theta + \beta_c^{(2)} \theta^2 + \dots \right] \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \equiv \left[ c_{ijkl}(0) + c_{ijkl}(0) \beta_c^{(1)} \theta + c_{ijkl}(0) \beta_c^{(2)} \theta^2 + \dots \right] \frac{\partial u^l}{\partial x^k}. \quad (15)$$

Закон Гука в виде (15) будет использован далее для получения основного уравнения рассеяния упругих (сейсмических) волн на объекте, подвергнутом тепловому воздействию, в рамках концепции двухканального подхода в приближении «расщепления» каналов взаимодействия.

**Носитель математической модели объекта исследования**

Основываясь на выводах предыдущих двух пунктов относительно физической модели гетерогенной среды, далее будем считать, что модули упругости и массовая плотность изучаемой среды являются функциями пространственных координат, т. е. зависят от распределения вещества в неоднородной среде, обусловленного наличием рассеивающих объектов (без учета теплового потока извне), а также функциями предварительных напряжений в среде, обусловленных тепловым воздействием на рассеивающие объекты. В данной статье рассматриваем только задачу рассеяния на уединенном объекте (рис. 3).

На рис. 3 введены следующие обозначения:  $V_0$  – неоднородность, обусловленная отличающимся от фоновой среды вещественным составом среды – собственно рассеивающий объект;  $V_1$  – неоднородность, обусловленная наличием поля индуцированных тепловым воздействием напряжений в изучаемом объекте. Внешняя пунктирная линия – это условная граница эффективного объема неоднородности  $V_{эфф}$ , за пределами которого находится фоновая среда с постоянными материальными параметрами

$$\rho = \rho_0; c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(0)}.$$

Таким образом, предполагается, что в фоновой среде нет индуцированных напряжений, а ее вещественный состав предполагается постоянным.

В идеале эффективный объем неоднородности может быть представлен следующим образом:

$$V_{эфф}^{def} = V_0 \cup V_1,$$

Однако для численного моделирования удобно полагать (рис. 3), что полный объем неоднородности

$$V_0 \cup V_1 \subset \subset V_{эфф}, \quad (16)$$

т. е. целиком заключен в  $V_{эфф}$ . Понятие эффективного объема неоднородности, введенное впервые в работах [5], позволит в дальнейшем при проведении выкладок отказаться от операции дифференцирования обобщенных функций, что значительно упростит все выводы.

В линейной теории рассеяние упругих волн неоднородностями гетерогенной среды описывается теорией возмущений для уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right] + \rho f^i. \quad (17)$$

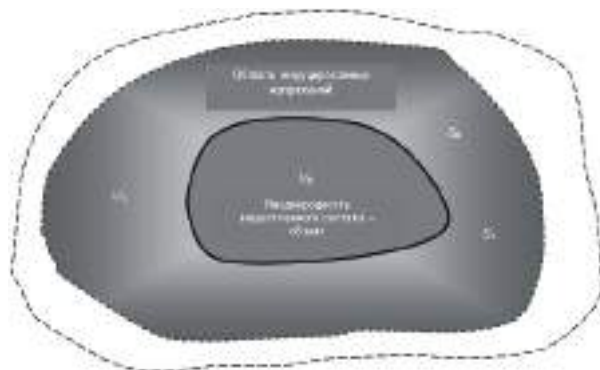
Предполагается, что в одноканальной теории рассеяния модули упругости зависят от координат точек сплошной среды, т. е.

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) \equiv c_{ijkl}(\vec{x}),$$

и могут быть представлены в виде

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0), \quad (18)$$

Величины  $\Delta c_{ijkl}$ , зависящие только от пространственных координат, называются вариациями, или флуктуациями модулей упругости, и позволяют смоделировать наличие в среде неоднородностей вещественного состава [2].



**Рисунок 3. Определение эффективного объема рассеивающей неоднородности.**  
**Figure 3. Determination of the effective volume of dispersing heterogeneity.**

Если учесть зависимость модулей упругости от индуцированных напряжений в среде, обусловленных их температурной зависимостью, то их следует рассматривать как функции четырех независимых переменных

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta), \tag{19}$$

Тогда в линейном приближении вместо (18) материалы параметры среды можно представить в виде

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) \equiv c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta), \tag{20}$$

В формулах (20) первое слагаемое – модули упругости однородной фоновой среды, второе слагаемое – вариации модулей упругости, обусловленные неоднородностью вещественного состава:

$$\Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) - c_{ijkl}^0, \tag{21}$$

т. е. наличием в среде рассеивающих объектов (формула (18)), а третье слагаемое – это вариации модулей упругости, обусловленные наличием тепловых процессов, вызывающих появление индуцированных (предварительных) напряжений в рассеивающем объекте

$$\Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) - c_{ijkl}^0.$$

С учетом (14) для  $\Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta)$  получаем:

$$\Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) - c_{ijkl}^0 = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [1 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] - c_{ijkl}^0. \tag{22}$$

В формулах (22) величины  $c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0)$  определяются из зависимости модулей упругости (19) при «нормальных условиях  $\theta = 0$ » для неоднородного рассеивающего объекта, т. е. определяются формулой (18):

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) \Big|_{\theta=0} = -c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0), \tag{23}$$

причем для  $c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3)$  в общем случае может выполняться одно из трех соотношений:

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) < c_{ijkl}^0(x_1, x_2, x_3),$$

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) > c_{ijkl}^0(x_1, x_2, x_3),$$

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) = c_{ijkl}^0(x_1, x_2, x_3),$$

Проводя несложные выкладки путем комбинирования полученных соотношений (20), (21), (22) и (23), получаем:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) &\equiv c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) = \left\{ (20), (22) \right\} = c_{ijkl}^0 + c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) - \\ &- c_{ijkl}^0 + c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [1 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] - c_{ijkl}^0 = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [2 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] - c_{ijkl}^0 = \\ &= [c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0)] [2 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] - c_{ijkl}^0 = 2c_{ijkl}^0 + c_{ijkl}^0 [1 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + 2\Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) + \\ &+ \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [1 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] - c_{ijkl}^0 = c_{ijkl}^0 + c_{ijkl}^0 [1 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) \times \\ &\times [3 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] = c_{ijkl}^0 [2 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [3 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Носитель математической модели объекта исследования представим следующими математическими соотношениями:

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \theta) = c_{ijkl}^0 [2 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [3 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots]. \quad (24)$$

К соотношениям (24) следует добавить аналогичное соотношение для массовой плотности:

$$\rho(x_1, x_2, x_3, \theta) = \rho_0 [2 + \alpha_c^{(1)}\theta + \alpha_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + \Delta \rho(x_1, x_2, x_3, 0) [3 + \alpha_c^{(1)}\theta + \alpha_c^{(2)}\theta^2 + \dots]. \quad (25)$$

Из (24) и (25) видно, что с учетом температурных зависимостей флуктуации материальных параметров приобретают следующий вид:

$$\Delta c_{ijkl}(\bar{x}, \theta) = c_{ijkl}(\bar{x}, \theta) - c_{ijkl}^0 = c_{ijkl}^0 [1 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, 0) [3 + \beta_c^{(1)}\theta + \beta_c^{(2)}\theta^2 + \dots]; \quad (26)$$

$$\Delta \rho(\bar{x}, \theta) = \rho(\bar{x}, \theta) - \rho_0 = \rho_0 [1 + \alpha_c^{(1)}\theta + \alpha_c^{(2)}\theta^2 + \dots] + \Delta \rho(\bar{x}, 0) [3 + \alpha_c^{(1)}\theta + \alpha_c^{(2)}\theta^2 + \dots], \quad (27)$$

где для краткости записи использовано обозначение  $\bar{x} \Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$ .

Соотношения (24)–(27) задают математическую модель объекта, которая используется в данной статье для построения теории уединенного акта рассеяния упругой (сейсмической) волны в нулевом приближении двухканального метода.

**Математическая модель процесса рассеяния упругих волн объектом с индуцированными тепловыми напряжениями**

Рассмотрим теперь построение математической модели рассеяния упругих волн ограниченным объектом, основанные на предыдущих выводах. При этом будем использовать результаты работ [2–5].

Уравнения распространения упругих волн для неоднородной среды в компонентной форме имеют вид ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) [1]:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right] + \rho f^i. \quad (28)$$

Ограничим, как это принято, модель процесса рассеяния, предполагая для всех полевых функций и внешних сил временную зависимость вида  $\exp(-i\omega t)$ . Такое ограничение упрощает математический аппарат и соответствует возможностям эксперимента. Тогда уравнение (28) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right] + \rho \omega^2 u^i = -\rho f^i. \quad (29)$$

Учитывая в (29) общее представление флуктуаций материальных параметров среды вида (18), после простых преобразований можно получить

$$c_{ijkl}^0 \frac{\partial^2 u^l}{\partial x^j \partial x^k} + \rho^0 \omega^2 u^i + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ \Delta c_{ijkl}(\bar{x}) \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right] + \Delta \rho \omega^2 u^i = -\rho^0 f^i - \Delta \rho(\bar{x}) f^i$$

или

$$c_{ijkl}^0 \frac{\partial^2 u^l}{\partial x^j \partial x^k} + \rho^0 \omega^2 u^i = -\frac{\partial}{\partial x^j} \left[ \Delta c_{ijkl}(\bar{x}) \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right] - \Delta \rho(\bar{x}) \omega^2 u^i - \rho^0 f^i. \quad (30)$$

Система уравнений (30) является моделью процесса рассеяния упругих волн неоднородным включением  $V_1$ , помещенным в однородную среду  $V_2$ . Можно сказать также, что уравнения (30) являются моделью процесса рассеяния упругих волн в неоднородной среде  $V = V_1 \cup V_2$ .

Функция Грина дифференциального оператора в левой части (30) является решением уравнения

$$c_{ijkl}^0 \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} G_{jk} + \rho^0 \omega^2 G_{ij} = -\delta_{ij} \delta(\bar{x} - \bar{x}_1). \quad (31)$$

Получение решения уравнения (2.9.7) – функции Грина для упругих волн – весьма громоздко, а его подробный вывод приведен в работе [16]. Запишем лишь конечный результат – функцию Грина для неограниченной изотропной среды:

$$G_{mn}(\bar{x}, \bar{x}', \omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ \delta_{mn} k_s^2 \frac{\exp(ik_s r)}{r} \right] - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \right) \left( \frac{\exp(ik_p r)}{r} - \frac{\exp(ik_s r)}{r} \right). \quad (32)$$

Здесь  $k_p, k_s$  – волновые числа для продольных и поперечных волн, соответственно.

Записывая формальное решение уравнения (30) как свертку функции Грина и источников в правой части (30), получаем

$$u^i(\bar{x}) = \iiint_{V_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j^1} \left[ \Delta c_{ijkl}(\bar{x}_1) \frac{\partial u_l}{\partial x_k^1} \right] + \Delta \rho(\bar{x}_1) \omega^2 u^p(\bar{x}_1) \right\} G_{ip}(\bar{x}, \bar{x}_1, \omega) d\bar{x}_1 + \rho^0 \iiint_{V'} f^p(\bar{x}_1) G_{ip}(\bar{x}, \bar{x}_1, \omega) d\bar{x}_1. \quad (33)$$

Напомним, что второе слагаемое в правой части (33) интерпретируется как решение уравнения

$$c_{ijkl}^0 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + \rho^0 \omega^2 u_i = -\rho^0 f_i$$



и описывает распространение возмущения от источников поля, сосредоточенных в объеме  $V$ , в однородной среде в отсутствие включения и называется в теории рассеяния падающим или первичным полем:

$$u_i^{in}(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^0 \iiint_{V'} f_p(\vec{x}') G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}', \omega) dx'.$$

Первое слагаемое в (33) обусловлено наличием вторичных источников – флуктуаций модулей упругости  $\Delta c_{ijkl}(\vec{x})$  и плотности  $\Delta \rho(\vec{x})$  в объеме неоднородности  $V_1$  – и называется рассеянным полем

$$u_i^{scat}(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_{V_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j^l} \left[ \Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u_l}{\partial x_k^l} \right] + \Delta \rho(\vec{x}_1) \omega^2 u^p(\vec{x}_1) \right\} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1, \omega) d\vec{x}_1.$$

Таким образом, в предположении линейности процесса рассеяния полное волновое поле  $u_i(\vec{x})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в объеме среды  $V = V_1 \cup V_2$  представляется в виде суммы

$$u_i(\vec{x}) = u_i^{in}(\vec{x}) + u_i^{scat}(\vec{x}). \tag{34}$$

Отметим, что рассеянное поле должно удовлетворять условию излучения Зоммерфельда, состоящему в том, что на бесконечно удаленной поверхности

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} \frac{1}{\|\vec{x}\|} u_i^{scat}(\vec{x}) = 0$$

Наличие в уравнении (33) члена с производными от функций, которые в общем случае могут иметь разрывы первого рода, а именно членов вида

$$\frac{\partial}{\partial x_j^l} \left[ \Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u_l}{\partial x_k^l} \right] \quad (p, j, k, l = 1, 2, 3)$$

приводит к серьезным вычислительным трудностям в случае неоднородностей среды с резкими границами. Эти трудности удастся преодолеть, если применить процедуру предельного перехода, предложенную в работе Pao и Varatharajulu [3–5, 11]. Применение этой процедуры приводит к интегральному уравнению следующего вида:

$$u_i(\vec{x}, \omega) = u_i^{in}(\vec{x}, \omega) \iiint_{V_1} \left\{ \Delta \rho(\vec{x}_1) \omega^2 u_p(\vec{x}_1, \omega) G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1, \omega) - \Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u_l}{\partial x_k^l}(\vec{x}_1, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j^l} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1, \omega) + (\vec{x}_1) \right\} d\vec{x}_1. \tag{35}$$

Уравнение (35) позволяет вычислять поле, рассеянное объектом, в одноканальной (в рамках принятой терминологии) теории рассеяния.

Пусть теперь рассматривается математическая модель двухканального процесса с каналами, связь между которыми разорвана. Тогда, учитывая в уравнении (35) наличие кроме флуктуаций, обусловленных неоднородностью вещественного состава, также флуктуаций, обусловленных внешними воздействиями немеханической (тепловой) природы, можем переписать уравнение (35) с учетом формул (26) и (27) в следующем виде:

$$u_i^i(\vec{x}, \omega) = u_{in}^i(\vec{x}, \omega) + \iiint_{V_{\text{эфф}}} \left\{ \left[ \rho_0(\vec{x}) (1 + \alpha_c^{(1)} \theta + \alpha_c^{(2)} \theta^2 + \dots) + \Delta \rho(\vec{x}_1, 0) (3 + \alpha_c^{(1)} \theta + \alpha_c^{(2)} \theta^2 + \dots) \right] \omega^2 u_p(\vec{x}_1, \omega) G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1, 0) - \left[ c_{pjkl}^0 (1 + \beta_c^{(1)} \theta + \beta_c^{(2)} \theta^2 + \dots) \Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1, 0) (3 + \beta_c^{(1)} \theta + \beta_c^{(2)} \theta^2 + \dots) \right] \frac{\partial u_l}{\partial x_k^l}(\vec{x}_1, \omega) \frac{\partial G_{ip}}{\partial x_j^l}(\vec{x}, \vec{x}_1, \omega) \right\} d\vec{x}_1. \tag{36}$$

Напомним, что по повторяющемуся дважды индексу в уравнении (36), как и во всех предшествующих формулах и соотношениях, производится суммирование в пределах  $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ .

Уравнение (36) достаточно громоздкое. Его можно несколько упростить, ограничиваясь конечным числом членов в разложении функциональных зависимостей материальных параметров в ряд Тейлора по температуре. Например, в линейном приближении уравнение примет, очевидно, следующий вид:

$$u_i^i(\vec{x}, \omega) = u_{in}^i(\vec{x}, \omega) + \iiint_{V_{\text{эфф}}} \left\{ \left[ \rho_0(\vec{x}) (1 + \alpha_c^{(1)} \theta) + \Delta \rho(\vec{x}_1, 0) (3 + \alpha_c^{(1)} \theta) \right] \omega^2 u_p(\vec{x}_1, \omega) G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1, 0) - \left[ c_{pjkl}^0 (1 + \beta_c^{(1)} \theta) + \Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1, 0) (3 + \beta_c^{(1)} \theta) \right] \frac{\partial u_l}{\partial x_k^l}(\vec{x}_1, \omega) \frac{\partial G_{ip}}{\partial x_j^l}(\vec{x}, \vec{x}_1, \omega) \right\} d\vec{x}_1. \tag{37}$$

Уравнение (36) – это искомое уравнение, описывающее рассеяние упругих волн уединенным объектом, находящимся под внешним тепловым воздействием, в рамках концепции параметрических систем. Уравнение (36) по существу является системой трех интегральных уравнений типа Фредгольма. Решение конкретной задачи с помощью этого уравнения можно находить одним из известных численных методов [13].

**Выводы и заключение**

В статье разработана теория рассеяния упругих волн объектом с предварительными напряжениями, индуцированными в материале рассеивателя посредством теплового канала связи с внешним миром. Предложен способ расщепления

механического и теплового каналов внешних воздействий, основанный на физически обоснованном предположении о слабости теплового канала, индуцирующего предварительные напряжения в материале рассеивающего объекта.

Модельной задачей для разработанной теории послужила задача контроля добычи высоковязкой нефти из предварительно разогретой ловушки, имеющая большое значение для промысловой геофизики.

Предлагаемая в статье теория позволяет в рамках физически обоснованных предположений свести решение весьма сложной в вычислительном плане нелинейной задачи о взаимодействии изучаемого объекта с сопряженными физическими полями (скалярное тепловое поле – векторное упругое волновое поле) к решению двух независимых задач – задачи о взаимодействии объекта с тепловым полем и задачи о взаимодействии объекта с волновым полем. Такое расщепление каналов взаимодействия позволяет перевести математическую модель изучаемой системы из класса сложных нелинейных математических моделей в класс значительно более простых параметрических моделей. Тем самым значительно упрощается алгоритм расчета отклика системы на внешнее воздействие, что позволяет серьезно сократить время расчетов с целью контроля процессов, происходящих в объекте исследования. Применительно к модельной задаче можно сказать, что резкое сокращение времени расчетов приводит в перспективе к соответствующему сокращению времени контроля за разогревом нефти в ловушке, а следовательно, появляется возможность оперативного контроля за процессом добычи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
2. Pao Y. H., Varatharajulu V. Huygens' principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. Vol. 59, № 6. P. 1361–1371. <https://doi.org/10.1121/1.381022>
3. Hudson J. A. The scattering of elastic waves by granular media // Quart Journal Mech. and Applies Math. 1968. Vol. 21, № 4. P. 487–502.
4. Surnev V. B., Islamgaliev D. V. Analisi di strade di protezione di domande di cliente // Italian Science Review. 2016. Vol. 2 (35). P. 16–30.
5. Данилова Е. Тяжелые нефти России // The Chemical Journal. Химический журнал. 2008. № 12. С. 34–37.
6. Дубинский Г. С. О вовлечении в разработку залежей с трудноизвлекаемой нефтью // Наука XXI века: теория, практика, перспективы: сборник трудов междунар. науч.-практ. конф. Уфа, 2015. С. 161–164.
7. Каюкова Г. П., Романов Г. В., Абдрафикова И. М., Петров С. М. Температурно-вязкостные характеристики сверхтяжелой нефти Ашальчинского месторождения // Нефтяное хозяйство. 2013. № 9. С. 44–46.
8. Макаревич В. Н., Искрицкая Н. И., Богословский С. А. Ресурсный потенциал месторождений тяжелых нефтей европейской части Российской Федерации // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2012. Т. 7, № 3. С. 13–14. [http://www.ngtp.ru/rub/6/43\\_2012.pdf](http://www.ngtp.ru/rub/6/43_2012.pdf)
9. Рошин П. В., Петухов А. В., Васкес Карденас Л. К., Назаров А. Д., Хромых Л. Н. Исследование реологических свойств высоковязких и высокопарафинистых нефтей месторождений Самарской области // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2013. Т. 8, № 1. С. 12–13. [https://doi.org/10.17353/2070-5379/12\\_2013](https://doi.org/10.17353/2070-5379/12_2013)
10. Селимов А. Д. Тепловые методы добычи высоковязких нефтей // Молодежный научный форум. Технические и математические науки: материалы XLIII студенческой междунар. заочной науч.-практ. конф. 2017. № 3. С. 54–58.
11. Васильев Д. В., Витоль М. Р., Горшенков Ю. Н. и др. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1982. 528 с.
12. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Человечков А. И. Параметрическая модель индуктивного измерительного преобразователя // Изв. вузов. Горный журнал. 2010. № 1. С. 49–56.
13. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
14. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
15. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
16. Жданов М. С., Матусевич В. Ю. Сейсмическая и электромагнитная миграция. М.: Наука, 1988. 376 с.
17. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Статья поступила в редакцию 26 февраля 2019 г.

# Information bearer channel method in the theory of exogenous geophysical systems

Victor Borisovich SURNEV<sup>1, 2\*</sup>,  
Vera Borisovna PYATKOVA<sup>1</sup>,  
Dmitry Vladimirovich ISLAMGALIEV<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ural State Mining University, Russia, Ekaterinburg

<sup>2</sup>Ural Federal University, Russia, Ekaterinburg

**The relevance of the work.** The relevance of the proposed theory is justified, for example, by the fact that, according to experts, Russia has very significant reserves of viscous oils (about 7 billion tons), the production of which is carried out by heat heating the contents of the trap or reservoir with superheated water vapor followed by pumping-out of the resulting fluid.

**Purpose of work.** Development of the theoretical foundations of seismic monitoring of the production of high-viscosity oil.

**The methodology of the theory considered in this article is based on the postulate of the two-channel nature of the process of interaction of a limited object (system) with the outside world. Through the first channel, an action is made on an object of a vector wave field, in this work it is an elastic wave field. Through the second channel, a stationary scalar field is exposed to the object; in this work, it is a thermal field. Thus, the theory of scattering of elastic waves by an object under the influence of an external scalar (thermal) field is considered. The scalar field in the material of the object induces preliminary elastic stresses, which appear as the response of the object to this effect. The secondary thermal field existing in the exterior of the object is not considered. Thus, the general self-consistent problem of the two-channel interaction of an object with an external field undergoes a channel decoupling procedure and reduces to scattering of an elastic wave by an object with material parameters functionally dependent on external thermal action, i.e., a general nonlinear physical system with distributed object-wave field parameters "Scalar field" is considered as a parametric system, which allows us to significantly simplify the algorithm and reduce the required for numerical simulation resources. Ideally, the algorithm and program for numerically solving the scattering problem should be brought to a state that allows for numerical simulation on a personal computer.**

As a model problem for the theory, which is supposed to be brought to practical implementation in the form of an algorithm and a complex of computational programs, the problem of seismic monitoring of the state of a trap with high-viscosity oil during heating of the trap by external heat, which is important for field and exploration geophysics, has been selected. Further, the authors propose to generalize the theory, develop an algorithm and create a complex of computer programs for electromagnetic monitoring of the state of an object under the influence of an external scalar (thermal) field, as well as the theory of interaction of an object with the outside world through several channels. For a more complete monitoring of the process, its mathematical model should be generalized to a substantially multichannel level, that is, consider the mathematical model "object – elastic wave field – electromagnetic wave field – heat field – field of static loading". The theory of multichannel interaction of an object with the outside world, generalized into several fields, can also be used for mathematical modelling in other areas of physics and technology, for example, in defectoscopy.

**Results.** The paper discusses the theory of process of interaction of a limited object (system) with the outside world, which is carried out through two information bearer channels. Through the first channel, a vector wave field is applied to the object (it is an elastic wave field in this work). Through the second channel, a stationary scalar field is exposed to the object (it is a thermal field in this work).

**Keywords:** scattering theory; elastic waves; seismic waves; pre-tensioning; high-viscosity oil; seismic control; math modelling; Lipman-Schwinger equation; integral equations.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P. 2002, *Matematicheskoye modelirovaniye. Idei. Metody. Primery* [Mathematical modeling. Ideas. Methods. Examples]. Moscow, 320 p.
2. Pao Y. H., Varatharajulu V. 1976, Huygens' principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves. *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 59, no. 6, pp. 1361–1371. <https://doi.org/10.1121/1.381022>
3. Hudson J. A. 1968, The scattering of elastic waves by granular media. *Quart Journal Mech. and Applies Math.*, vol. 21, no. 4, pp. 487–502.
4. Surnev V. B., Islamgaliev D. V. 2016, Analisi di strade di protezione di domande di cliente. *Italian Science Review.*, vol. 2 (35), pp. 16–30.
5. Danilova E. 2008, Heavy oils of Russia. *Khimicheskij zhurnal* [The Chemical Journal], no. 12, pp. 34–37. (In Russ.)
6. Dubinsky G. S. 2015, About involvement in the development of deposits with hard-to-recover oil. 21<sup>st</sup> Century Science: Theory, Practice, Prospects: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference. Ufa, pp. 161–164.
7. Kayukova G. P., Romanov G. V., Abdrafikova I. M., Petrov S. M. 2013, Temperature and viscosity characteristics of high-paraffin crude oil of the Ashalchinsky field. *Neftyanoye khozyaystvo* [Oil industry], no. 9, pp. 44–46. (In Russ.)
8. Makarevich V. N., Iskrikskaya N. I., Bogoslovsky S. A. 2012, Resource potential of low-grade oil fields in the European part of the Russian Federation. *Neftgazovaya Geologiya. Teoriya i Praktika* [Petroleum Geology – Theoretical and Applied Studies], vol. 7, no. 3, pp. 13–14. (In Russ.) [http://www.ngtp.ru/rub/6/43\\_2012.pdf](http://www.ngtp.ru/rub/6/43_2012.pdf)
9. Roshchin P. V., Petukhov A. V., Vazquez Kardenas L. K., Nazarov A. D., Khromykh L. N. 2013, Study of the rheological properties of high-viscosity and high-paraffin oils in the Samara Region deposits. *Neftgazovaya Geologiya. Teoriya i Praktika* [Petroleum Geology – Theoretical and Applied Studies], vol. 8, no. 1, pp. 12–13. (In Russ.) [https://doi.org/10.17353/2070-5379/12\\_2013](https://doi.org/10.17353/2070-5379/12_2013)
10. Selimov A. D. 2017, Thermal methods of extraction of high-viscosity oils. Forum of young researchers. Technical and mathematical sciences: materials of the XLIII student international correspondence scientific-practical conference, no. 3, pp. 54–58.
11. Vasil'yev D. V., Vitol' M. R., Gorshenkov YU. et al. 1982, *Radiotekhnicheskiye tsepi i signaly* [Radio engineering circuits and signals]. Moscow, 528 p.
12. Surnev V. B., Pyatkova V. B., Manchekov A. I. 2010, Parametric model of inductive measuring transducer. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal* [News of the Higher Institutions. Mining Journal], no. 1, pp. 49–56. (In Russ.)
13. Vladimirov V. S. 1988, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, 512 p.
14. Lurie A. I. 1980, *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, 512 p.
15. Dieslesan E., Royer D. 1982, *Uprugiy volny v tverdykh telakh* [Elastic waves in solids]. Moscow, 424 p.
16. Zhdanov M. S., Matushevich V. Yu. 1988, *Seysmicheskaya i elektromagnitnaya migratsiya* [Seismic and electromagnetic migration]. Moscow, 376 p.
17. Kalitkin N. N. 1978, *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, 512 p.

The article was received on February, 26, 2019

\* [sournev@yandex.ru](mailto:sournev@yandex.ru)

 <https://orcid.org/0000-0001-6534-6668>

\*\* [vera.pyatkova@m.ursmu.ru](mailto:vera.pyatkova@m.ursmu.ru)

\*\*\* [dif1205@mail.ru](mailto:dif1205@mail.ru)

 <https://orcid.org/0000-0002-4222-9458>