УДК 528.335

СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

(в порядке обсуждения)

И. А. Шлемов, А. В. Гальянов

Представлено полное решение задачи уравнивания треугольника по способу наименьших квадратов и упрощенному способу, разработанному А. В. Гальяновым.

Ключевые слова: *уравнительные вычисления; решение треугольника; способ наименьших квадратов; упрощенный способ уравнивания.*

В специальной и учебной литературе по уравниванию геодезических триангуляционных сетей и маркшейдерских сетей сгущения рассматриваются примеры уравнительных вычислений достаточно сложных геометрических фигур, начиная с четырехугольника и т. д. Вместе с тем основой этих сетей является треугольник, решение которого не рассматривается, а ограничивается правилом: угловая невязка «разбрасывается» на все углы поровну с обратным знаком. Если принять во внимание то, что угловая невязка есть просто некомпенсированные ошибки измерения углов [1], а не точность угловых измерений, то решение треугольника приобретает методическую целесообразность.

Геометрические основы решения треугольника. Решение треугольника в системе геодезических сетей есть нахождение «истинных» значений его элементов по результатам непосредственных измерений. У плоского треугольника имеется 6 элементов: 3 стороны и 3 угла. Для решения треугольника используются три основные теоремы: косинусов, синусов и суммы углов:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{\text{ур}}+\beta_{\text{ур}}+\gamma_{\text{ур}}=180^{\circ};\\&\frac{c_0}{\sin\gamma_{\text{ур}}}=\frac{a_{ур}}{\sin\alpha_{\text{ур}}}=\frac{b_{ур}}{\sin\beta_{\text{ур}}};\\&c_0=\sqrt{a_{\text{ур}}^2+b_{\text{ур}}^2-2a_{\text{ур}}b_{\text{ур}}\cos\gamma_{\text{ур}}}.\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Известно, что для решения треугольника необходимое и достаточное количество исходных данных равно трем, причем один из них должен быть обязательно линейным, в противном случае, решением будет бесконечное множество подобных треугольников.

В общем виде, для определения координат точки C достаточно измерить длину одной из сторон и ее дирекционный угол, при известной исходной стороне AB (рис. 1).

Конечный результат вычислений по определению координат точки C через базисные пункты A и B имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&X_C(A)=X_A+b\cos\alpha;\\&Y_C(A)=Y_A+b\sin\alpha;\end{aligned}\right|\quad \left.\begin{aligned}&X_C(B)=X_B+a\cos\left(180^{\circ}-\beta\right);\\&Y_C(B)=Y_B+a\sin\beta.\end{aligned}\right|$$

Схема уравнительных вычислений по способу наименьших квадратов. Исходными данными для уравнивания треугольника по способу наименьших квадратов являются измеренные углы α, β и γ, измеренные стороны a и b при известном базисе c_0. Уравнять треугольник – значит привести соотношение его элементов к требованиям геометрии [2] путем решения независимых уравнений, количество которых равно: $r = n – k$, где r – количество независимых уравнений; n – число всех измеренных величин (включая базис); k – необходимое их количество.

Угловая невязка в треугольнике ABC

$$\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ}=\omega.$$

Принимая, что $d\alpha$, $d\beta$ и $d\gamma$ рассматриваются как ошибки непосредственных измерений углов, будем иметь

$$d\alpha+d\beta+d\gamma=\omega. \qquad (2)$$

Из теоремы косинусов после дифференцирования получаем

$$dc_{p1}=da\cos\beta+db\cos\alpha=c_{p1}-c_0.$$

Из теоремы синусов по стороне a после дифференцирования получаем

$$dc_{p2}=da\frac{c_0}{a}+c_0\text{ctg}\,\gamma\frac{d\gamma}{\rho}-$$

$$-c_0 \operatorname{ctg} \alpha \frac{d\gamma}{\rho} = c_{p2} - c_0.$$

Таким образом, имеем три независимых уравнения с пятью неизвестными параметрами.

На основе данной системы условных уравнений составляется матрица B – матрица коэффициентов линейных уравнений поправок. Она содержит частные производные от функций, вычисляемые по результатам измерений. По этим данным составляется Q_w – матрица обратных весов. После обращения получается матрица Q_w^{-1} – матрица коэффициентов уравнений коррелат.

Матрица B составляется по схеме

$$B = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \end{vmatrix};$$

$$b_{1,1} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 1; b_{1,2} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 1; b_{1,3} = \frac{\partial\omega}{\partial\gamma} = 1;$$

$$b_{1,4} = \frac{\partial\omega}{\partial a} = 0; b_{1,5} = \frac{\partial\omega}{\partial b} = 0; b_{2,1} = \frac{\partial\Delta c_{p1}}{\partial\alpha} = 0;$$

$$b_{2,2} = \frac{\partial\Delta c_{p1}}{\partial\beta} = 0;$$

$$b_{2,3} = \frac{\partial\Delta c_{p1}}{\partial\gamma} = \frac{ab}{c_{p1}\rho}\sin\gamma; b_{2,4} = \frac{c_0}{c_{p1}}\cos\beta;$$

$$b_{2,5} = \frac{c_0}{c_{p1}}\cos\alpha; b_{3,1} = -\frac{c_0}{\rho\tan\alpha};$$

$$b_{3,2} = \frac{\partial\Delta c_{p2}}{\partial\beta} = 0; b_{3,3} = \frac{\Delta c_{p2}}{\partial\gamma} = \frac{c_0}{\rho\tan\gamma};$$

$$b_{3,4} = \frac{\partial\Delta c_{p2}}{\partial a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}; b_{3,5} = \frac{\Delta c_{p2}}{\partial b} = 0.$$

Матрица Q_w конструируется из матрицы B по схеме

$$Q_w = \begin{vmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{vmatrix};$$

$$q_{1,1} = b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2 + b_{1,3}^2 + b_{1,4}^2 + b_{1,5}^2; q_{1,2} = q_{2,1} =$$
$$= b_{1,1}b_{2,1} + b_{1,2}b_{2,2} + b_{1,3}b_{2,3} + b_{1,4}b_{2,4} + b_{1,5}b_{2,5};$$

$$q_{1,3} = q_{3,1} = b_{1,1}b_{3,1} + b_{1,2}b_{3,2} + b_{1,3}b_{3,3} + b_{1,4}b_{3,4} +$$
$$+ b_{1,5}b_{3,5}; q_{2,2} = b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 + b_{2,3}^2 + b_{2,4}^2 + b_{2,5}^2;$$
$$q_{3,2} = q_{2,3} = b_{2,1}b_{3,1} + b_{2,2}b_{3,2} + b_{2,3}b_{3,3} + b_{2,4}b_{3,4} +$$
$$+ b_{2,5}b_{3,5}; q_{3,3} = b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 + b_{3,4}^2 + b_{3,5}^2.$$

Для обращения Q_w составляется матрица U по схеме

$$U = \begin{vmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} \\ U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} \end{vmatrix};$$

$$U_{1,1} = \sqrt{q_{1,1}}; U_{1,2} = U_{2,1} = \frac{q_{1,2}}{U_{1,1}}; U_{1,3} = U_{3,1} = \frac{q_{1,3}}{U_{1,1}};$$

$$U_{2,2} = \sqrt{q_{2,2} - U_{1,2}^2}; U_{2,3} = U_{3,2} = -\frac{U_{1,2}U_{1,3} - q_{2,3}}{U_{2,2}};$$

$$U_{3,3} = \sqrt{q_{3,3} - U_{1,3}^2 - U_{2,3}^2}.$$

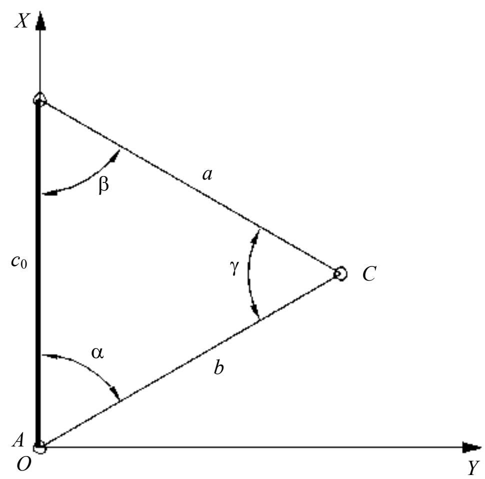

Рис. 1. Схема определения координат точки C

Составляется матрица обратная матрице Q_w по схеме

$$Q_w^{-1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix};$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{U_{2,3}^2}; a_{3,2} = a_{2,3} = -\frac{U_{2,3}}{U_{2,2}U_{3,3}^2}; a_{3,1} = a_{1,3} =$$
$$= -\frac{a_{3,2}U_{1,2} + a_{3,3}U_{1,3}}{U_{1,1}}; a_{2,2} = -\frac{a_{2,3}U_{2,3}U_{2,2} - 1}{U_{2,2}^2};$$

$$a_{2,1} = a_{1,2} = -\frac{a_{2,2}U_{1,2} + a_{2,3}U_{1,3}}{U_{1,1}};$$

$$a_{1,1} = -\frac{a_{1,2}U_{1,2}U_{1,1} + a_{1,3}U_{1,3}U_{1,1} - 1}{U_{1,1}^2}.$$

Уравнения коррелат K принимают общий вид

$$K_1 = -\left(a_{1,1}\omega + a_{1,2}\Delta c_{p1} + a_{1,3}\Delta c_{p2}\right);$$

$$K_2 = -\left(a_{2,1}\omega + a_{2,2}\Delta c_{p1} + a_{2,3}\Delta c_{p2}\right);$$

$$K_3 = -\left(a_{3,1}\omega + a_{3,2}\Delta c_{p1} + a_{3,3}\Delta c_{p2}\right).$$

В результате уравнения поправок в измеряемые параметры треугольника определяются из выражений

$$\varepsilon\alpha = V_1 = b_{1,1}K_1 + b_{2,1}K_2 + b_{3,1}K_3;$$

$$\varepsilon\beta = V_2 = b_{1,2}K_1 + b_{2,2}K_2 + b_{3,2}K_3;$$

$$\varepsilon\gamma = V_3 = b_{1,3}K_1 + b_{2,3}K_2 + b_{3,3}K_3;$$

$$\varepsilon a = V_4 = b_{1,4}K_1 + b_{2,4}K_2 + b_{3,4}K_3;$$

$$\varepsilon b = V_5 = b_{1,5}K_1 + b_{2,5}K_2 + b_{3,5}K_3;$$

$$\alpha_{\text{ур}} = \alpha + \varepsilon\alpha;$$

$$\beta_{\text{ур}} = \beta + \varepsilon\beta; \gamma_{\text{ур}} = \gamma + \varepsilon\gamma;$$

$$a_{\text{ур}} = a + \varepsilon a; b_{\text{ур}} = b + \varepsilon b.$$

В конечном результате по уравненным параметрам треугольника ABC находятся координаты точки C. Контролем правильности вычислений служит выполнение условий (1).

Приведенное развернутое решение треугольника положено в основу составления компьютерной программы для исследования влияния формы и ошибок непосредственных измерений на результат уравнительных вычислений.

Схема уравнительных вычислений по способу А. В. Гальянова. В основе данного способа уравнивания [1] лежит следствие из теоремы синусов, связывающее стороны треугольника с диаметром описанной вокруг данного треугольника окружности.

Доказательство данного следствия основано, в свою очередь, на следствии из теоремы о вписанном угле, доказывающей, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, а угол, опирающийся на диаметр – прямой. Таким образом, если построить диаметр A_1C (рис. 2), то образованный треугольник A_1BC будет прямоугольным, а углы BAC и BA_1C – равными α, так как опираются на дугу BC.

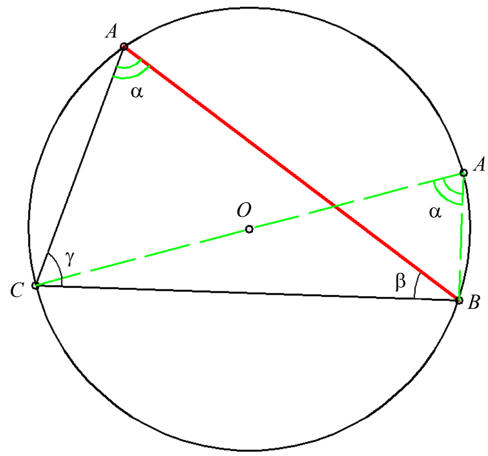

Рис. 2. Схема доказательства следствия из теоремы синусов

По определению синуса в прямоугольном треугольнике:

$$\sin\angle\alpha = \frac{BC}{A_1C} = \frac{BC}{2R}.$$

Отсюда

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle\alpha}.$$

Аналогично доказывается подобное равенство для других сторон треугольника.

В схеме, приведенной в [1], параметр $2R$ обозначен буквой U:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = U.$$

Исходными данными для уравнивания треугольника по этому способу также являются измеренные углы α, β и γ, измеренные стороны a, b и известный базис C_0. Алгоритм вычислительных операций сводится к следующей последовательности.

Находится параметр U – диаметр описанной окружности, вычисленный из различных комбинаций сторон и противолежащих им углов:

$$U_c = \frac{c_0}{\sin\gamma}; U_a = \frac{a}{\sin\alpha}; U_b = \frac{b}{\sin\gamma}.$$

Находится среднее значение $\bar{U}$. Вес U_c для расчетов принимается равным $Pc = 2$, так как содержит только одну ошибку за счет измерения угла γ. Веса U_a и U_b принимается равными $P_a = P_b = 1$.

$$\bar{U} = \left.\frac{2U_c + U_a + U_b}{4}\right|.$$

Определяется уравненное значение угла γ_{yp} из соотношения

$$\sin\gamma_{yp} = \frac{c_0}{\bar{U}}; \gamma_{yp} = \arcsin\frac{c_0}{\bar{U}}.$$

Вычисляется угловая невязка ω_2 треугольника ABC с учетом уравненного угла $\gamma_{\text{ур}}$:

$$\alpha + \beta + \gamma_{yp} - 180^{\circ} = \omega_2.$$

Очевидно, что полученная новая невязка распространяется только на углы α и β:

$$d\alpha + d\beta = \omega_2.$$

Находится промежуточный параметр $\bar{V}$, также получаемый из теоремы синусов [1]:

$$V_a = \frac{a}{b}; \left.V_\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right|;$$

$$\bar{V} = \frac{V_a + V_\alpha}{2};$$

Вычисляются поправки в углы α и β в виде $\varepsilon\alpha$ и $\varepsilon\beta$:

$$\left.\varepsilon\beta = \frac{\omega}{\bar{V}\left(\cos\beta / \cos\alpha\right) + 1}\right|;$$

Тогда

$$\varepsilon\alpha = \omega - \varepsilon\beta.$$

Вводя полученные поправки в измеренные углы с обратным знаком, находят уравненные углы α и β:

$$\alpha_{\text{ур}} = \alpha - \varepsilon\alpha; \beta_{\text{ур}} = \beta - \varepsilon\beta.$$

Контролем правильности вычисления углов является сумма углов в треугольнике:

$$\alpha_{\text{ур}} + \beta_{\text{ур}} + \gamma_{\text{ур}} - 180^{\circ} = 0^{\circ}.$$

Находятся уравненные стороны a и b из выражений

$$a_{\text{ур}} = \bar{U}\sin\alpha_{\text{ур}}; b_{\text{ур}} = \bar{U}\sin\beta_{\text{ур}}.$$

Контролем правильности вычисления длин сторон треугольника является теорема косинусов:

$$c_0^2 = a_{\text{ур}}^2 + b_{\text{ур}}^2 - 2a_{\text{ур}}b_{\text{ур}}\cos\gamma_{\text{ур}}.$$

По уравненным параметрам треугольника ABC находятся координаты точки C по формулам (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гальянов А. В. Способ уравнивания треугольника // Маркшейдерия и недропользование. 2013. № 1. С. 61–62.
2. Бахурин И. М. Курс маркшейдерского дела. М.: Высш. школа, 1962. 494 с.

Поступила в редакцию 14 июня 2013 г.

Шлемов Иван Александрович – аспирант. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: smeag@mail.ru
Гальянов Алексей Владимирович – доктор технических наук, профессор кафедры маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: sgimd@mail.ru