

# ТЕОРИЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ И ОСНОВАНИЙ. Устойчивость отвалов\*

А. В. Жабко

## THEORY OF CALCULATION OF THE STABILITY OF SLOPES AND BASES. Stability of dumps

A. V. Zhabko

This article is the forth part of the published work on the creation of a unified theory of calculating the stability of slopes for arbitrary geological conditions. Ensuring the sustainability of dumps and determination of their limit parameters is one of the priority tasks of open deposit development. One of the main problems in this matter is the lack of suitable, in terms of their sustainability, areas allocated for dumping. In this regard, dumps are poured out on the inclined or not prepared (not stable) base. Thereby, the likelihood of destruction of dumps and their bases significantly increases. However, the negative geomechanical effects on the dumps may lead to the halt of stripping works, and hence the output. The question of stability of dumps (embankments) is also relevant in hydraulic, industrial, civil, and transport construction.

Methods of research of this work are variational, differential and integral calculus as well as the theory of stability of homogeneous, heterogeneous and anisotropic slopes, which author published earlier.

The first part of the article examines the possible ways of loss of dumps stability. The study reveals similarities between dumps stability on a different bases and homogeneous, heterogeneous and anisotropic slopes.

In the second part of the research, one can see solutions of specific examples on the stability of dump on inclined base and unstable inclined base. Author describes in detail the procedure for solving these problems. We present a comprehensive mathematical apparatus for the implementation of these decisions. All solutions have strict mechanical and mathematical formulation.

**Keywords:** slope, dump, angle of slope, angle of internal friction, cohesion, height of dump, the equilibrium condition, stability of dump, contact base of dump, sliding

Статья является четвертой частью публикуемой работы по созданию единой теории расчёта устойчивости откосов в произвольных горно-геологических условиях. Обеспечение устойчивости отвалов и определение их предельных параметров является одной из приоритетных задач открытой разработки месторождений. Одной из главных проблем в данном вопросе является отсутствие подходящих, с точки зрения обеспечения их устойчивости, площадей, отводимых под отвалообразование. В связи с этим отвалы отсыпаются на наклонное или неподготовленное (неустойчивое) основание. Таким образом, значительно возрастает вероятность разрушения отвалов и их оснований. Вместе с тем негативные геомеханические явления на отвалах могут привести к остановке вскрышных работ, а значит, и добычи. Вопрос устойчивости отвалов (насыпей) является также актуальным в гидротехническом, промышленном, гражданском и транспортном строительстве. Методами исследования настоящей работы являются вариационное, дифференциальное и интегральное исчисления, а также теория устойчивости однородных, неоднородных и анизотропных откосов, которая опубликована ранее. В первой части статьи рассматриваются возможные способы потери устойчивости отвалов. Выявляются аналогии между устойчивостью отвалов на различном основании и однородными, неоднородными и анизотропными откосами. Во второй части исследований решаются конкретные примеры на устойчивость отвала на наклонном основании и неустойчивом наклонном основании. Подробно описывается порядок решения рассматриваемых задач. Приводится исчерпывающий математический аппарат для реализации данных решений. Все решения даны в строгой механико-математической постановке.

**Ключевые слова:** откос; отвал; угол откоса; угол внутреннего трения; сцепление; высота отвала; условие равновесия; устойчивость отвала; контакт; основание отвала; поверхность скольжения; излом поверхности скольжения.

На рис. 1 показан отвал, расположенный на слабом наклонном основании. В зависимости от соотношений параметров, влияющих на его устойчивость, возможны три варианта его разрушения:

- 1) разрушение произойдет по поверхности скольжения, проходящей только в породах отвала;
- 2) поверхность скольжения частично будет совпадать с контактом отвал-основание;
- 3) поверхность скольжения преломляется на контакте отвал-основание, проходит по породам основания и выходит на некотором расстоянии от нижней бровки откоса.

В связи со сказанным расчет отвала по первому варианту идентичен расчету однородного откоса, по второму – анизотропного, а по третьему – неоднородного откоса.

В частном случае, когда породы основания прочные (устойчивые), а отвальная масса является скальной и отсыпается в один ярус под углом

естественного откоса, отвал будет устойчивым при любой его высоте.

Вместе с тем при расчете устойчивости отвалов имеются некоторые особенности, которые и будут рассмотрены далее.

Не усложняя и без того непростую схему расчета устойчивости откосов, будем считать распределенную нагрузку  $q$  постоянной. Теоретически она может быть задана произвольной функцией, однако установить на практике ее распределение, как правило, не представляется возможным.

Рассмотрим пример расчета отвала на слабом наклонном основании. Пусть отвал скальных пород отсыпан под углом естественного откоса, т. е. разрушение по первой схеме невозможно. Геометрические характеристики отвала, нагрузка и физико-механические свойства следующие (рис. 1):  $\alpha = \varphi_1 = 35^\circ$ ;  $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$ ;  $C_1 = 0 \text{ т/м}^2$ ;  $q = 3 \text{ т/м}$ . Характеристики контакта:  $\beta = 15^\circ$ ;  $C' = 5 \text{ т/м}^2$ ;  $\varphi' = 15^\circ$ .

Перейдем к расчету отвала по второй схеме. В принципе, расчет такого отвала полностью идентичен примерам на анизотропный и подработанный откос, рассмотренным в предыдущих частях. Единственное дополнение заключается в пригрузке площадки отвала. Однако никаких принципиальных трудностей пригрузке не вызывает. Её действие учитывается при суммировании сил под площадкой следующим образом:

$$\int_{H/k}^{H/k+h/\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left[ \gamma \left( H - \left( H - h + \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( x - \frac{H}{k} \right) \right) + \frac{q}{\gamma} \right) \left( \sqrt{1 + f^2} \right) \right] dx,$$

где  $h$  – глубина поверхности скольжения на стыке участков откоса и бермы.

По результатам численного решения примера определены геометрические параметры наиболее слабой поверхности скольжения и предельная высота отвала. Результаты представлены в виде вектора определяемых параметров:  $\{\lambda \ s \ d \ h \ x_0 \ \text{tg} \ \psi \ H\}^T = \{0,88 \ 1,53 \ 1,38 \ 21,17 \ 7,36 \ 48,97 \ 1,07 \ 53,76\}^T$  ( $d, h_1$  – соответственно масштабный коэффициент и глубина поверхности скольжения на стыке откоса и площадки, остальные обозначения см. ранее). Поверхность скольжения приведена на рис. 2.

В заключение отметим, что если бы породы отвала обладали сцеплением, отыскание поверхности скольжения необходимо было бы производить при  $n = 1$ , т. е.  $\lambda = C/\gamma$ .

Рассмотрим теперь пример расчета отвала по третьей схеме. Расчет по этой схеме является наиболее сложным и включает в себя практически все элементы и приемы расчета, рассмотренные в предыдущих частях. Дело в том, что поверхность скольжения будет проходить как под

\* Первая часть статьи опубликована в вып. 4(40) за 2015 г., с. 45–57.

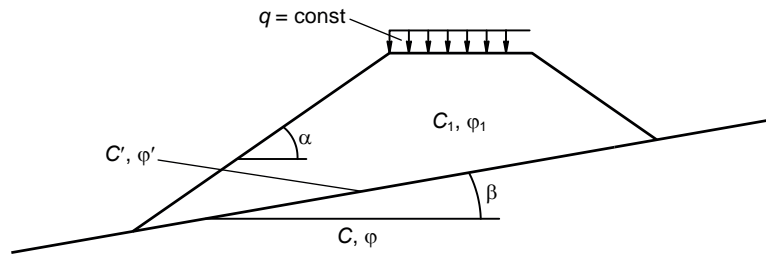


Рисунок 1. Схема отвала на слабом наклонном основании / Figure 1. Scheme of dump on the weak inclined base.

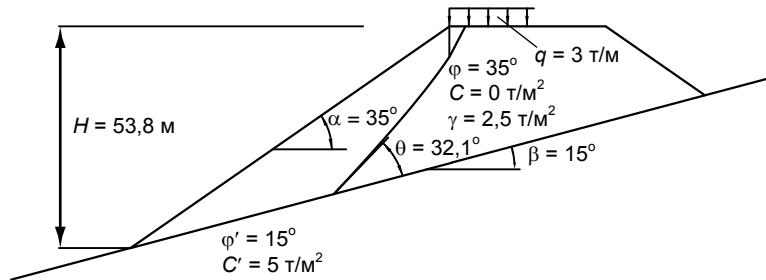


Рисунок 2. Расчет отвала на наклонном основании / Figure 2. Calculation of dump on the inclined base.

откосом отвала, так и под откосом основания, угол наклона которого в пределе может быть равен нулю. Ранее приходилось рассматривать лишь откосы с углом, превышающим угол внутреннего трения пород. В связи с этим возникают некоторые особенности расчета, которые рассмотрим по порядку.

Будем считать, что угол наклона откоса основания меньше угла внутреннего трения слагающих его пород, т. е.  $0 \leq \alpha_1 \leq \varphi$ . В противном случае рассматриваемая задача будет сводиться к задаче по расчету неоднородного откоса, которая была рассмотрена в предыдущих частях. Кроме того, угол наклона откоса основания должен быть менее угла трения пород основания.

При построении поверхностей скольжения в однородных свободных откосах и определении их предельных параметров был введен некоторый коэффициент  $\lambda$ , обеспечивающий выполнение условия предельного равновесия и определяющий предельные параметры откосов. Когда рассматривается участок выпора пород с углом откоса, меньшим угла внутреннего трения пород основания, очевидно, условие предельного равновесия должно выполняться автоматически, т. е.  $n = 1$  (см. ранее), подобно тому, как и на участке под верхней бермой принималось  $n = 1$ .

Итак, начиная с точки, находящейся на некотором удалении от нижней бровки отвала до точки, соответствующей нижней бровке отвала, при выполнении условия  $\alpha_1 \leq \varphi$  поверхность скольжения описывается известным уравнением (так как  $n = 1$ ,  $\lambda$  заменяем на  $C/\gamma$ ):

$$k_1 x - y_1 = \frac{C}{\gamma} \cdot \frac{(k_1 f - 1) y_1'^2 + 2(k_1 + f) y_1' + 1 - k_1 f}{f y_1'^2 - 2f^2 y_1' + k_1 - f + k_1 f^2},$$

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_1 + \varphi}{2}\right) \leq y_1' \leq \varphi. \quad (1)$$

Построение поверхности скольжения на этом участке имеет некоторую особенность, связанную с тем, что  $\alpha_1 \leq \varphi$ . Дело в том, что функция (1) имеет разрыв в точке

$$p = f - \sqrt{\frac{(f - k_1)(1 + f^2)}{f}},$$

где  $p$  – параметр интегрирования (по сути, производная функции поверхности скольжения).

В случае, когда  $\alpha_1 > \varphi$ , разрыва функции нет, т. е. как и в рассмотренных ранее задачах, например, на однородный откос.

Разрыв функции будет иметь место при выполнении условия:  $0 < \alpha_1 < \varphi$ . При этом точка разрыва (угол наклона поверхности скольжения) в зависимости от угла внутреннего трения и угла откоса находится в интервале:  $-\left[\pi/4 - \varphi/2\right] \leq \vartheta \leq \varphi$ . Точка разрыва  $\vartheta$  является максимальным значением угла поверхности скольжения на этом интервале, определяется глубиной расположения поверхности скольжения на стыке участков откосов отвала и откоса основания и не может превышать значения  $\operatorname{arctg} p$ .

Следующий участок поверхности скольжения (второй) находится под откосом отвала, а сама поверхность скольжения пока проходит по породам основания отвала. Так как в точке под нижней бровкой отвала  $\vartheta < \varphi$ , то поверхность скольжения на рассматриваемом участке описывается уравнением:

$$kx - y_2 = \frac{\left[\lambda(kf - 1) + Af^2\right] y_2'^2 + 2\left[\lambda(k + f) + Af\right] y_2' + \lambda(1 - kf) + A}{f y_2'^2 - 2f^2 y_2' + k - f + kf^2}. \quad (2)$$

Если в уравнении (2) положить  $A = 0$  и принять  $\lambda \equiv C/\gamma$  или, что то же самое, воспользоваться условием трансверсальности на пересечении с откосом, то получим уравнение (1).

Условие на стыке участков откоса отвала и откоса основания получим при рассмотрении разрывной вариационной задачи второго рода при условии равенства ординат по обе стороны от стыка (Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1950. 296 с.):

$$\frac{h_1(1 + f^2) + \frac{C}{\gamma}(f - 2 \operatorname{tg} \psi_1 - f \operatorname{tg}^2 \psi_1)}{(1 + f \operatorname{tg} \psi_1)^2} = \frac{h_1(1 + f^2) + \lambda(f - 2 \operatorname{tg} \psi_2 - f \operatorname{tg}^2 \psi_2)}{(1 + f \operatorname{tg} \psi_2)^2}.$$

где  $h_1$  – глубина точки излома;  $\psi_1, \psi_2$  – углы наклона поверхности скольжения в точке преломления.

Заметим, что излом поверхности скольжения на стыке участков откоса отвала и откоса основания будет иметь место, если угол откоса отвала больше угла внутреннего трения пород отвала, а угол откоса основания меньше угла внутреннего трения пород основания. В противном случае излома поверхности не будет.

Далее на участке  $\vartheta > \varphi$  поверхность скольжения описывается уже известным уравнением:

$$kx - y_3 = (\lambda + B) \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - (k + 3f)y_3'^2 + 2kfy_3' + k - f},$$

где  $B$  – постоянная интегрирования.

Этим уравнением описывается поверхность скольжения на третьем участке, который продолжается до контакта основание–отвал. Далее, как и было показано в предыдущих частях работы, поверхность скольжения преломляется, после чего начинается четвертый участок. В случае если угол наклона поверхности скольжения после преломления превышает угол внутреннего трения пород отвала (если это не так, то появится еще

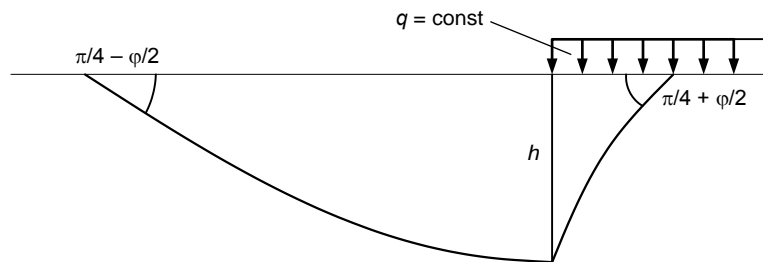


Рисунок 3. Расчет устойчивости основания / Figure 3. The calculation of base stability.

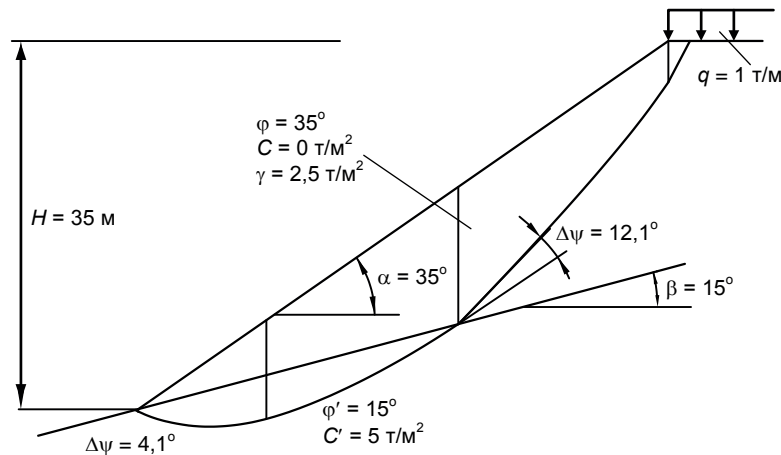


Рисунок 4. Расчет отвала на слабом наклонном основании / Figure 4. Calculation of dump on weak inclined base.

один участок, описываемый уравнением (2) с углом внутреннего трения, характеризующим породы отвала), поверхность скольжения опишется уже известным уравнением:

$$kx - y_4 = d \frac{(1 + y_4')^2}{2y_4'^3 - (k + 3f_1)y_4'^2 + 2kf_1y_4' + k - f_1},$$

где  $d$  – постоянная.

Условие в точке преломления поверхности скольжения на контакте основание–отвал при условии равенства объемных весов пород основания и отвала имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi_3 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_3} - \frac{\operatorname{tg} \psi_4 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_4} + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \psi_3) \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi_3 - \operatorname{tg}^2 \psi_3}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_3)^2} -$$

$$-(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \psi_4) \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \psi_4 - \operatorname{tg}^2 \psi_4}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_4)^2} = \frac{\lambda(1 - C_1 / C)}{h_2},$$

где  $\psi_3, \psi_4$  – соответственно угол наклона поверхности скольжения до преломления в основании отвала и после преломления в породах отвала;  $\beta$  – угол наклона контакта основание–отвал в точке преломления;  $h_2$  – глубина точки излома;  $C, C'$  – соответственно сцепление пород отвала и основания;  $\varphi_1, \varphi$  – соответственно углы внутреннего трения пород отвала и основания.

Заметим, что если сцепления пород отвала и основания равны нулю, то правая часть условия преломления поверхности скольжения также равна нулю.

Все остальные уравнения и параметры определяются подобно тому, как в задачах на неоднородный и проработанный откос, а также из примера отвала на наклонном основании.

Рассмотрим частный случай – горизонтальное основание под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$  (рис. 3).

Для откосов, угол наклона которых превышает угол внутреннего

трения, поверхность скольжения состоит из трех участков, на каждом из которых свое условие равновесия или устойчивости. Для оснований (угол откоса равен нулю) средний участок поверхности скольжения будет отсутствовать, так как не выполняется критерий. Таким образом, поверхность скольжения для основания состоит из двух участков, причем для обоих участков необходимо принять  $n = 1$ . Нагруженный участок подобен вертикальному откосу – участок горизонтальной бермы, а ненагруженный участок – участку выпора. Глубина точки излома поверхности скольжения  $h$  является параметром, изменяя который, отыскиваем поверхность скольжения с максимальной разницей сдвигающих и удерживающих призму смещения сил. Аналогично для наклонного основания глубину точки излома на стыке участков откоса отвала и откоса основания  $h_1$  можно принять в качестве изменяемого параметра.

Рассмотрим пример расчета нагруженного отвала ( $q = 1$  т/м) с геометрическими параметрами:  $\alpha = 35^\circ; H = 35$  м и физико-механическими свойствами:  $\varphi = 35^\circ; \gamma = 2,5$  т/м<sup>3</sup>;  $C = 0$  т/м<sup>2</sup>, отсыпанного на слабое наклонное основание, обладающее физико-механическими характеристиками:  $\varphi = 15^\circ; \gamma = 2,5$  т/м<sup>3</sup>;  $C = 5$  т/м<sup>2</sup>.

По результатам численного решения определены следующие геометрические параметры:

$$\{h_1 h_2 h_3 \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \psi_5 \lambda d A B\}^T =$$

$$= \{0, 22 \ 13, 05 \ 3, 91 - 29, 6 - 25, 5 \ 34, 0 \ 46, 1 \ 56, 8 \ 2, 42 \ 0, 74 \ 1, 11 \ 1, 37\}^T,$$

где  $h_3$  – глубина поверхности скольжения на стыке участков откоса отвала и горизонтальной площадки;  $\psi_5$  – угол наклона поверхности скольжения на стыке участков откоса отвала и горизонтальной площадки (со стороны откоса).

На рис. 4 представлен пример расчета устойчивости отвала с выпором основания. Отметим, что показанная на рис. 4 поверхность скольжения является предельной, но не является наиболее слабой, как отмечалось выше, критическую поверхность скольжения необходимо отыскивать перебором параметра, например  $h_1$ .

Андрей Викторович Жабко,  
zhabkoav@mail.ru  
Уральский государственный горный университет  
Россия, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Andrey Viktorovich Zhabko,  
zhabkoav@mail.ru  
Ural State Mining University  
Ekaterinburg, Russia