

РАБОЧИЙ ПРОЦЕСС ПОЛОЧНОГО ФРИКЦИОННОГО СЕПАРАТОРА С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ТРАМПЛИНОМ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

П. М. Анохин, А. И. Афанасьев, Ю. М. Казаков, В. Я. Потапов

Operating process of shelving friction separator with curvilinear ramp of variable curvature

P. M. Anokhin, A. I. Afanas'ev, Yu. M. Kazakov, V. Ya. Potapov

Separation by the elasticity and friction is widely used in mining and construction industries. The simplest device for separating by friction is a shelf separator, which consists of the inclined shelf designed to disperse a particle to a speed that will be dependent from friction coefficient. Inclined shelf ends in the bottom with the curved ramp. Curved ramp can be made in an arc with a constant and a variable radius, and it can be considered as the second stage of the preparation of particles with different coefficients of friction for the separation. Authors established experimentally that the friction in this area varies depending on the location of the particle, i.e. radius. At different points of the concave trajectory, the normal pressure of a particle on a curved surface is different. Thus, setting the law of radius variation lets us to control descent speed of the particle from the curved ramp and, thus, the separation efficiency.

Using Newton's second law in the research allowed obtaining in polar coordinates differential equation of motion of the rock particles in the curved trampoline made in the form of a logarithmic spiral. The equation includes spiral parameters: polar radius, the angle between the path tangent and polar radius vector, and the friction coefficient. As a result of the integration of these equations authors obtained velocity of the particle during its descent from the curved ramp, as well as the direction of speed, which allows to determine the initial conditions of motion in free flight of the particle. According to the well-known separation speed of the particle from the curved ramp one can identify its horizontal and vertical components. Then, using the law of conservation of energy and the differential equations of motion of a particle in free flight, authors determined the distance of the particle falling on the horizontal plane, measured from the edge of ramp. The study shows the results of calculations on the model and the results of experiments on a physical model that demonstrates the adequacy of the mathematical model. A curved ramp with a variable radius of curvature provides a larger range of particle distribution that indicates as an increase in the efficiency of the separation process.

Keywords: shelving friction separator; friction coefficient; equation of motion of a particle; particle velocity; curvilinear ramp; logarithmic spiral.

Разделение по упругости и трению широко применяется в горной и строительной промышленности. Наиболее простым устройством для разделения по трению является полочный сепаратор, который состоит из наклонной полки, предназначенной для разгона частицы до скорости, зависящей от коэффициента трения. Наклонная полка заканчивается в нижней части криволинейным трамплином. Криволинейный трамплин может быть выполнен по дуге с постоянным и переменным радиусом, и его можно считать вторым этапом подготовки частицы с различными коэффициентами трения к разделению. Экспериментально установлено, что сила трения на этом участке меняется в зависимости от места нахождения частицы, т. е. радиуса. В разных точках вогнутой траектории нормальное давление частицы на криволинейную поверхность различное. Таким образом, задаваясь законом изменения радиуса, можно регулировать скорость схода частицы с криволинейного трамплина и, соответственно, эффективность разделения. С использованием второго закона Ньютона в полярных координатах получены дифференциальные уравнения движения частицы горной породы на криволинейном трамплине, выполненном в виде логарифмической спирали. В уравнения входят параметры спирали: полярный радиус, угол между касательной к траектории и полярным радиус-вектором, коэффициент трения. В результате интегрирования этих уравнений получена скорость движения частицы при её сходе с криволинейного трамплина, а также направление скорости, что позволяет определить начальные условия движения при свободном полете частицы. По известной скорости отрыва частицы от криволинейного трамплина были определены её горизонтальная и вертикальная составляющие. Затем с использованием закона сохранения энергии и дифференциального уравнения движения частицы при свободном полете было определено расстояние падения частицы на горизонтальную плоскость, отсчитанную от кромки трамплина. Приводятся результаты расчетов по модели и результаты экспериментов на физической модели, которые доказывают адекватность математической модели. Показано, что криволинейный трамплин с переменным радиусом кривизны позволяет получить больший веер распределения частиц, что свидетельствует о повышении эффективности процесса сепарации.

Ключевые слова: фрикционный полочный сепаратор; коэффициент трения; уравнение движения частицы; скорость частицы; криволинейный трамплин; логарифмическая спираль.

Разделение по упругости, трению, а также комбинированное разделение по упругости и трению широко применяются в горной и строительной промышленности. Наиболее простым устройством для разделения по трению является полочный сепаратор, который представляет собой совокупность нескольких механических устройств, каждое из которых предназначено для разделения частиц обогащаемого материала по различным признакам (рис. 1) [1, 2]. В настоящее время известно несколько конструкций полочных сепараторов [3]. Сепаратор (рис. 1) состоит из наклонной полки 1 (узла стратификации), на которой происходит разгон частицы до скорости, зависящей от коэффициента трения. Узел стратификации подготавливает к разделению частицы с различными коэффициентами трения. Наклонная полка заканчивается в нижней части криволинейным трамплином 2. Криволинейный трамплин 2 выполнен по дуге с постоянным радиусом, и его можно считать вторым этапом подготовки частиц с различными коэффициентами трения к разделению. Сила трения на этом участке меняется в зависимости от места нахождения частицы. В разных точках вогнутой траектории нормальное давление частицы на криволинейную поверхность различное. Вследствие этого на первом этапе движение равноускоренное, а на втором оно подчиняется довольно сложному закону. Уменьшение скорости на криволинейном участке нелинейно и зависит от коэффициента трения. В результате при выходе частиц на участок свободного полета они имеют существенно различные скорости, а вылет частиц происходит по настильным траекториям. Таким образом, образуется веер разделения, благодаря которому возможно формирование продуктов частиц с различным содержанием полезного компонента.

Под трамплином устанавливаются приёмные ёмкости 3, в которые попадает разделенный по трению продукт.

Процесс движения каждой частицы можно описать математической моделью, включающей уравнения движения на каждом этапе разделения (рис. 2).

Свободный полет частицы начинается из точки В (см. рис. 1) со скоростью v_0 , направленной по касательной к дуге окружности трамплина в данной точке.

Таким образом, для математического описания движения частицы в барабанно-полочном сепараторе необходимо составить уравнения, позволяющие определить скорость частицы в конце наклонной плоскости (в точке А) и в конце дуги (в точке В).

Движение частицы по наклонной плоскости описывается относительно простыми дифференциальными уравнениями, которые в статье не приводятся.

¹ Сепаратор для разделения материалов по трению и упругости: пат. 111780 Рос. Федерация. № 2010153621/03; заявл. 24.06.11; опубл. 27.12.11. Бюл. № 36.

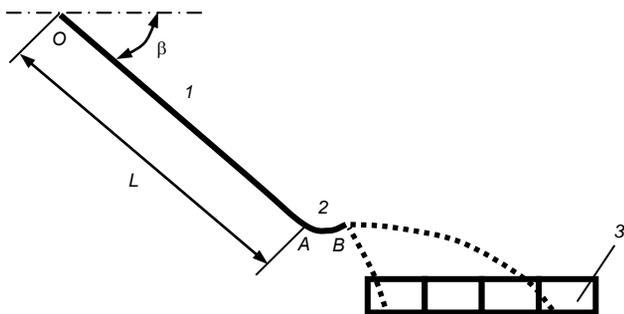


Рисунок 1. Схема движения частицы в полочном фрикционном сепараторе / Figure 1. The scheme of the particle motion in the shelving friction separator.

Множество вариантов движения частицы при различных значениях исходных параметров вызывает необходимость проведения математического эксперимента на ЭВМ. Это позволит подобрать наиболее рациональные конструктивные параметры самого сепаратора.

Получив скорость, равную v_A , частица выходит на криволинейный участок дуги AB (рис. 3).

Известное решение задачи, когда траекторией движения частицы является окружность, основано на том, что радиус траектории частицы постоянен, совпадает с нормалью, и угол между касательной к траектории и радиусом всегда равен $\pi/2$. Наличие данных ограничений существенно упрощает процесс интегрирования уравнений движения частиц, однако значительно сужает возможность выбора параметров, регулирующих процесс разделения.

Естественным расширением модели процесса разделения частиц по трению является выбор поверхности движения частицы с переменным радиусом кривизны. В настоящей работе в качестве такой поверхности выбрана логарифмическая спираль $r = ke^{k_1\theta}$, где r, θ – полярные координаты; k, k_1 – постоянные параметры. У логарифмической спирали нормаль к траектории не совпадает с полярным радиусом, но угол между касательной к траектории и полярным радиус-вектором постоянен. Это даёт возможность получить необходимые интегралы при решении дифференциальных уравнений движения частиц.

В новой модели радиус кривизны траектории и величина угла между касательной и полярным радиусом являются дополнительными параметрами, влияющими на величину приложенной к частице силы трения, которая и обуславливает процесс разделения. Кроме того, введение новых параметров позволяет уточнить форму траектории, рационализирующей процесс разделения по трению.

Уравнения движения материальной точки массой m под действием силы тяжести, силы трения и реакции опоры в проекции на оси естественной системы координат tMi (см. рис. 3), написанные для произвольного положения M на траектории, имеют вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi - F_{тр} = -mg \sin \varphi - fN, \quad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = -mg \cos \varphi + N,$$

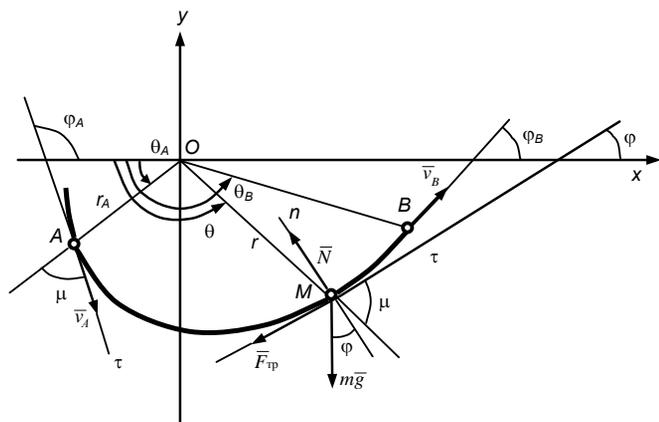


Рисунок 3. Движение точки по логарифмической спирали / Figure 3. The movement of the point by logarithmic spiral.

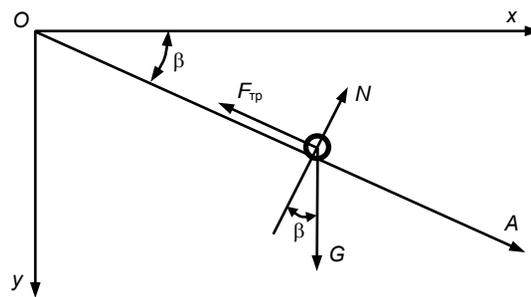


Рисунок 2. Силы, действующие на частицу при движении на наклонной плоскости / Figure 2. Forces applied on a particle in motion on an inclined plane.

где v – скорость точки; f – коэффициент трения скольжения; N – реакция опоры; ρ – радиус кривизны спирали в месте, где находится материальная точка M ; φ – угол наклона касательной Mt к положительному направлению оси Ox ; r, θ – полярные координаты. Направление отсчета полярного угла показано на рис. 3.

Исключив из уравнений (1) реакцию N , получим выражение

$$m \frac{dv}{dt} + f \frac{mv^2}{\rho} = -mg (\sin \varphi + f \cos \varphi). \quad (2)$$

Представим уравнение (2) в виде

$$\frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + v\varphi^2 = -g\rho (\sin \varphi + f \cos \varphi). \quad (3)$$

Покажем, что и при переменном радиусе кривизны в каждый момент времени выполняется равенство

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = v,$$

где v – скорость точки в произвольном месте траектории; φ – угол наклона касательной к траектории. Пусть траектория задана уравнением $y = y(x)$. Радиус кривизны траектории равен

$$\rho = \frac{[1 + y'_x]^2}{y''_{xx}}.$$

Имеем $\operatorname{tg} \varphi = y'_x$, тогда $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''_{xx}}{1 + y'^2_x}$.

Получим равенство

$$\rho \frac{d\varphi}{dx} = \frac{[1 + y'^2_x]^{3/2}}{y''_{xx}} \cdot \frac{y''_{xx}}{1 + y'^2_x} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}} = \frac{v}{v_x}.$$

С другой стороны имеем

$$\rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \rho \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{v_x}.$$

Приравняв найденные выражения, получим требуемое равенство. Принимая его во внимание, приведём уравнение (3) к виду:

$$\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = -2g\rho (\sin \varphi + f \cos \varphi). \quad (4)$$

Радиус кривизны траектории, входящий в правую часть уравнения (4), при движении точки по логарифмической спирали зависит от положения точки, определяемого полярным углом θ , и равен:

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = (k\sqrt{1 + k_1^2}) e^{k_1\theta}.$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (4), выразим полярный угол θ , входящий в выражение радиуса кривизны, через угол φ . Име-

ем очевидное равенство (см. рис. 3): $(\pi - \theta) + \varphi + (\pi - \mu) = \pi$, где μ – угол между продолжением радиус-вектора r точки на кривой и положительным направлением касательной к траектории. Величина угла μ вычисляется по формуле $\operatorname{tg} \mu = r / r'_\theta$. Так как траектория частицы представляет собой логарифмическую спираль $r = ke^{k\theta}$, то угол $\mu = \operatorname{arctg}(1/k_1)$ и является постоянной величиной. Таким образом, при движении точки по логарифмической спирали в любой момент времени полярный угол θ отличается от угла наклона касательной φ на постоянную величину и равен $\theta = \varphi - \mu + \pi$.

Подставляя выражение радиуса кривизны в выражение (4), получим уравнение движения частицы в окончательном виде:

$$\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = -2g \left(k\sqrt{1+k_1^2} \right) \exp(k_1(\varphi - \mu + \pi)) (\sin \varphi + f \cos \varphi). \quad (5)$$

Выражение представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно v^2 по переменной φ . Его решение представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения $(dv^2/d\varphi) + 2fv^2 = 0$ и частного решения неоднородного.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$v_{\text{одн}}^2 = Ce^{-2f\varphi},$$

где C – постоянная интегрирования.

Частное решение ищем в виде:

$$v_{\text{част}}^2 = \exp(k_1(\varphi - \mu + \pi)) (A \sin \varphi + B \cos \varphi),$$

где A, B – неопределенные коэффициенты.

Подставим частное решение в неоднородное уравнение (5). Приравняв в правой и левой частях найденного уравнения коэффициенты при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, получим систему относительно коэффициентов A и B :

$$(k_1 + 2f)A - B = -2gfk\sqrt{1+k_1^2}; \quad (k_1 + 2f)B + A = -2gk\sqrt{1+k_1^2}.$$

Решая систему, находим выражения для неопределенных коэффициентов:

$$A = -\frac{2gk(k_1 + 3f)\sqrt{1+k_1^2}}{1 + (k_1 + 2f)^2}, \quad B = \frac{2gk[1 - f(k_1 + 2f)]\sqrt{1+k_1^2}}{1 + (k_1 + 2f)^2}.$$

В результате общее решение дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$v^2 = Ce^{-2f\varphi} + \exp(k_1(\varphi - \mu + \pi)) (A \sin \varphi + B \cos \varphi).$$

Очевидно, в практических расчетах положение точки удобнее определять не углом наклона касательной φ , а полярным углом θ . Окончательно скорость точки в зависимости от ее положения, определяемого полярным углом, определяется выражением

$$v_B^2 = C \exp(-2f(\theta + \mu - \pi)) + e^{k_1\theta} \left(\frac{2gk[1 - f(k_1 + 2f)]\sqrt{1+k_1^2}}{1 + (k_1 + 2f)^2} \cos(\theta + \mu - \pi) - \frac{2gk(k_1 + 3f)\sqrt{1+k_1^2}}{1 + (k_1 + 2f)^2} \sin(\theta + \mu - \pi) \right). \quad (6)$$

Привязка модели к реальному обогащению аппарату осуществляется по начальным условиям движения частицы. Так, частица вначале скатывается по наклонной плоскости с заданным углом наклона $\alpha = 30^\circ - 40^\circ$ и затем через сопряжение спирали с наклонной плоскостью в точке A (см. рис. 3) попадает на спираль. Это даёт возможность считать известным начальный угол касательной и вычислить значение полярного угла θ_A , необходимого для осуществления сопряжения логарифмической спирали с наклонной плоскостью.

В начальном положении частицы на спирали (в точке A) справедливы уравнения

$$r_A = ke^{k\theta_A}, \quad \theta_A + \alpha + \mu = \pi, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{k_1}. \quad (7)$$

Петр Михайлович Анохин,

доцент

Анатолий Ильич Афанасьев,

доктор технических наук, профессор

Юрий Михайлович Казаков,

кандидат технических наук, доцент

Валентин Яковлевич Потапов,

доктор технических наук, профессор

Уральский государственный горный университет

Россия, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Задаваясь здесь углом α наклона плоскости, величиной k – начальным значением радиус-вектора спирали при $\theta = 0$ и значением r_A – величиной радиус-вектора частицы в начале её движения по спирали, находим угол μ как результат решения трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg} \mu = a - b\mu, \quad a = \frac{\pi - \alpha}{\ln r_A - \ln k}, \quad b = \frac{1}{\ln r_A - \ln k}.$$

При известном значении μ остальные параметры (k_1 и θ_A) элементарно определяются из уравнений (7).

Для проверки модели произведены расчеты скорости точки при её движении по логарифмической спирали при значениях начальных параметров $\alpha = 30^\circ$, $k = 78$ мм, $r_A = 100$ мм, $f = 0,4$, $v_A = 3$ м/с. Получены следующие значения параметров спирали: $\mu = 77,4^\circ$; $k_1 = 0,22$; $\theta_A = 72,6^\circ$. В точке схода частицы со спирали, определяемой полярным углом $\theta_B = 125,0^\circ$, её скорость составила $v_B = 1,56$ м/с.

После расчета по формуле (6) скорости отрыва частицы от криволинейного трамплина были определены её горизонтальная и вертикальная составляющие. Затем с использованием закона сохранения энергии и дифференциального уравнения движения частицы при свободном полёте было определено расстояние падения частицы на горизонтальную плоскость, отсчитанную от кромки трамплина. Оно оказалось равным 43 см. Для хромита, имеющего коэффициент трения $0,38 - 0,42$, экспериментально определенный на физической модели, это расстояние равно 41 см. Для других образцов горных пород также наблюдалось незначительное расхождение между экспериментальными и теоретическими результатами. Таким образом, доказана адекватность математической модели реальному процессу, что позволяет определять рациональные параметры полочного сепаратора с криволинейным трамплином.

Авторами была изготовлена физическая модель полочного сепаратора, имеющего параметры: длина наклонной плоскости – 1,25 м; угол наклона плоскости – 25–45 град.; центральный угол трамплина – 90–120 град., ширина полки – 200 мм. Первые три параметра соответствуют параметрам промышленных сепараторов, а третий параметр практически определяет только производительность и не влияет на характер протекания рабочего процесса.

В результате испытаний установлено, что при прочих равных условиях веер разделения у сепаратора с трамплином, выполненным по логарифмической спирали, оказался больше, чем у сепаратора с цилиндрическим трамплином, на 30–40 %. Это свидетельствует о возможности более точно отделять пустую породу от полезного ископаемого и, следовательно, большей эффективности процесса сепарации.

Выводы

1. Математическая модель рабочего процесса полочного сепаратора с криволинейным трамплином адекватно отражает реальный рабочий процесс.
2. Криволинейный трамплин с переменным радиусом кривизны позволяет получить больший веер распределения частиц, что повышает эффективность процесса сепарации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпцев С. А., Потапов В. Я., Афанасьев А. И. Аппараты для разделения горных пород по упруго-фрикционным свойствам. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 90 с.
2. Тимченко Н. К., Матросов А. А. Механические классификаторы щебня и гравия по прочности // Строительные материалы. 1966. № 11. С. 4–5.
3. Ляпцев С. А., Потапов В. Я. Математическое описание поведения рудных частиц в воздушном потоке разделительных аппаратов // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 1. URL: www.science-education.ru/101-5493

REFERENCES

1. Lyaptsev S. A., Potapov V. Ya., Afanas'ev A. I. 2014, *Apparaty dlya razdeleniya gornyykh porod po uprugofriksionnykh svoystvam* [Apparatus for the separation of rocks according to the elastic-friction properties]. LAP LAMBERT Academic Publishing, Deutschland, Saarbrücken, 90 p.
2. Timchenko N. K., Matrosov A. A. 1966, *Mekhanicheskie klassifikatory shchebnia i graviya po prochnosti* [Mechanical classifiers of rubble and gravel by strength]. *Stroitel'nye materialy* [Construction Materials], no. 11, pp. 4–5.
3. Lyaptsev S. A., Potapov V. Ya. 2012, *Matematicheskoe opisanie povedeniya rudnykh chastits v vozdushnom potoke razdelitel'nykh apparatov* [The mathematical description of the behavior of the ore particles in the airflow of separating devices]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education], no. 1. Available at: www.science-education.ru/101-5493

Petr Mikhaylovich Anokhin,

Assistant Professor

Anatoliy Il'ich Afanas'ev,

Dr, Professor

Yuriy Mikhaylovich Kazakov,

PhD, Assistant Professor

Valentin Yakovlevich Potapov,

Dr, Professor

Ural State Mining University

Ekaterinburg, Russia