

УДК 622(23.02+83)

УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Жабко А. В.

На основании ранее выполненных автором исследований в работе предлагается критерий разрушения твердых тел (горных пород). Излагаются методологические основы его получения с краткими теоретическими выкладками. Производится его анализ и интерпретация получаемых результатов. Анализируется значение угла наклона наиболее опасной площадки среза в предельном равновесии для различного уровня напряженного состояния. Показывается, что значение данного угла не является постоянной величиной, а зависит от значений предельных компонент главных напряжений. Рассматриваются частные случаи предлагаемого критерия для идеально сыпучих и идеально связанных сред. Указывается на принципиальное отличие критериев Кулона и Мора. Указывается на преимущества предлагаемого критерия перед известным аналогом при его использовании в качестве поверхности текучести (пластического потенциала). Дана физическая интерпретация явлению дилатансии при разрушении твердых тел.

Ключевые слова: критерий разрушения; условия равновесия; дифференциальное уравнение; главные напряжения; угол наклона площадки скольжения; критерий Кулона; критерий Мора; ассоциированный закон пластического течения; коэффициент дилатансии; пластическое деформирование.

В работе [1] автором получен критерий разрушения горных пород, имеющий следующий вид:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi \sigma_1}{C}}, \quad (1)$$

где σ_3 , σ_1 – главные напряжения; C – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

Рассмотрим полупространство (толщу земной коры). Разобьем его вертикальным сечением на две части. Отбросим одну из них, заменяя ее действие по глубине эпюрой распределения горизонтальных главных напряжений σ_3 (рис. 1). Таким образом, определение пластической (жесткопластической)

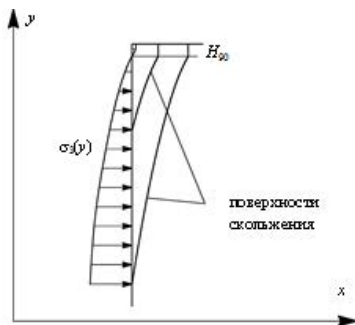


Рис. 1. Расчетная схема к определению эпюры горизонтальных напряжений с глубиной

составляющей компоненты горизонтальных напряжений сводится к определению этой эпюры, то есть к определению закона рас-

пределения нормальных напряжений с глубиной. Для определения эпюры распределения напряжений необходимо знать положение и форму поверхности скольжения, по которой будет разрушен массив, а также располагать условием равновесия породной призмы. Условие равновесия призмы смещения вдоль произвольной поверхности скольжения имеет следующий вид [2, 3]:

$$\int [\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + (T' + fE')y'] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0, \quad (2)$$

где γ – объемный вес горных пород; \hat{y}, y – функции линий откоса и поверхности скольжения, соответственно; y' – производная функции поверхности скольжения; T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения, соответственно, слева и справа; $f = \operatorname{tg} \varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); C – сцепление массива горных пород; E', T' – соответственно производные функций нормальной и касательной составляющих межблоковой реакции.

Для использования выражения (2) необходимо знать закон распределения межблоковых реакций вдоль поверхности скольжения.

С другой стороны, в работе [1] показывается, что для обнажений типа «вертикальный откос» условие равновесия имеет следующий вид:

$$\int [\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C(1+y'^2)] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (3)$$

Наиболее слабая поверхность скольжения определяется решением следующей вариационной задачи [1]:

$$\int [\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C(1+y'^2)] dx \rightarrow \max. \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение поверхности скольжения имеет следующий вид [1]:

$$(H-y) = \frac{C(y'^2-1)}{\gamma \operatorname{tg} \varphi}. \quad (5)$$

Потенциальные поверхности скольжения, описываемые уравнением (5) для различных глубин, приведены на рис. 1.

Перейдем к анализу выражения (1). Его можно представить в следующем виде:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \operatorname{tg} \psi, \quad (6)$$

где ψ – угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к направлению действия главного напряжения.

Если $\sigma_3 = 0$ (одноосное сжатие), то $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{сж}}$ ($\sigma_{\text{сж}}$ – предел прочности на одноосное сжатие). При увеличении σ_3 (сжимающие напряжения считаются положительными) угол наклона критической площадки также увеличивается. Если выполняется условие $\sigma_p < \sigma_3 < 0$ (σ_p – предел прочности на одноосное растяжение), то $\psi < \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$. В случае, если материал имеет пластический характер разрушения, то есть $\varphi = 0$, угол наклона критической площадки среза является постоянной величиной, не зависящей от уровня напряжений, и равен $\psi = 45^\circ$. А критерий (1, 6) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2C. \quad (7)$$

Выражение (7) есть не что иное, как известный критерий разрушения Треска (Сен-Венана) (1868) [4].

Для идеально сыпучих материалов ($C = 0$), критерий (1) дает выражение:

$$\sigma_1 = \sigma_3. \quad (8)$$

Формула (8) выражает условие равновесия жидкости, что соответствует гидростатическому полю распределения напряжений. При $C \rightarrow 0$ угол наклона критической площадки скольжения возрастает до $\psi = 90^\circ$, а второе слагаемое в правой части уравнения (1), которое можно назвать девиаторным, стремится к нулю.

Необходимо также отметить, что среду с отсутствием сцепления нельзя ассоциировать, например, с отвалом горных пород, в котором величина сцепления анизотропна. С другой стороны, полное отсутствие сцепления (сопротивления разрыву) и внутреннего трения (вязкости) соответствует определению идеальной жидкости.

Из выражения (1) также следует, что для высокого уровня напряжений предельные компоненты главных напряжений равны:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1. \quad (9)$$

Из выражений (8) и (9) следует, что для несвязных материалов и материалов, обладающих сцеплением, но находящихся в условиях высоких напряжений, условия предельного равновесия совпадают. Другими словами, можно говорить о том, что на больших глубинах породы проявляют свойства жидкости.

Очевидно, что напряжение σ_1 в критерии (1) не может быть отрицательным, поэтому, положив $\sigma_1 = 0$, получим $\sigma_3 = -2C$. То есть предел прочности на растяжение по модулю не может превышать двойного сцепления ($|\sigma_p| < 2C$). То есть для несвязных материалов $|\sigma_p| = 0$.

Заметим, что при выводе условий равновесия (2, 3) и определении геометрии наиболее опасной поверхности скольжения (4, 5) использовался линейный критерий Кулона (1776) [4]:

$$\tau = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C, \quad (10)$$

где τ , σ_n – предельные касательные и нормальные напряжения на площадке среза, соответственно.

Уравнение (10) в литературе часто называют критерием Кулона – Мора, Мора – Кулона или просто Мора. В 1900 году Мор предложил общую форму критерия прочности, связывающую главные нормальные напряжения, причем конкретную функциональную зависимость он не предлагал. В дальнейшем было предложено построение паспорта прочности (10) в виде огибающей предельных кругов Мора. Отметим, что в случае криволинейной огибающей предельных кругов Мора угол наклона критической площадки среза к линиям действия главных напряжений будет меняться, что противоречит существующей теории.

Однако заметим очень важное различие между критериями Кулона и Мора. Критерий Кулона в форме (10) был получен чисто эмпирически, и в нем совершенно ничего не говорится о главных напряжениях. Критерий Мора выражает предельное соотношение только через главные напряжения, и в нем ничего не говорится о напряжениях на площадке среза. Паспорт прочности по Кулону может быть непосредственно получен по результатам испытаний на прямой срез. Для получения паспорта прочности в осях главных напряжений по Мору необходимо произвести трехосные (объемные) испытания.

Для получения отображения паспорта прочности в осях главных напряжений из системы напряжений на площадке среза (и наоборот), то есть связи критериев Кулона и Мора, необходимо располагать условиями передачи внешней нагрузки (главных напряжений) на площадку среза, что на современном этапе развития экспериментальной базы невозможно. Тем не менее, критерий (10) в осях главных напряжений некоторые авторы, например [5], представляют в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3. \quad (11)$$

Между критериями (1) и (11) существуют два принципиальных отличия. Во-первых, в критерии разрушения (11) угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к линии действия главного напряжения σ_3 является величиной постоянной, $\psi = \pi/4 + \varphi/2$. Данный

угол обеспечивает максимальную разницу между сдвигающими и удерживающими силами по площадке среза в окрестности конкретной точки при заданном уровне напряжений. В критерии (1) угол наклона критической площадки является величиной переменной, зависящей от уровня напряжений, это и придает критерию прочности кривизну. Кроме того, значение угла наклона критической площадки определяется из условия максимума разности сдвигающих и удерживающих сил вдоль всей поверхности разрушения на возможном перемещении всей механической системы (призмы смещения). Во-вторых, минимальное главное напряжение σ_3 не совершает работу на площадке сдвига, то есть не реализует удерживающего эффекта в виде трения. И действительно, если подставить критерий разрушения (1) в систему уравнений (12), то получим критерий Кулона в виде уравнения (10).

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \psi, \\ \tau &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (12)$$

Фактически критерий (1) получен моделированием разрушения твердого тела в изменяющемся поле главных напряжений, и в этой связи он имеет некоторое методологическое сходство с микродефектными теориями прочности.

Если линеаризовать уравнение (1) в окрестности точки ($\sigma_1 = \sigma_{сж}$; $\sigma_3 = 0$), то критерий разрушения примет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + (1 + \sin \varphi) \sigma_3. \quad (13)$$

Линеаризация критерия (1) эквивалентна замене криволинейной поверхности скольжения на прямолинейную с углом падения площадки среза $\psi = \pi/4 + \varphi/2$, при тех же механических характеристиках. Анализируя выражения (11) и (13), констатируем их качественное сходство, а при $\varphi = 0$ они совпадают.

Известно, что пластическое деформирование у хрупких материалов ($\varphi \neq 0$) сопровождается увеличением их объема (дилатансией). Вопрос об увеличении объема при пла-

стическом деформировании удобнее рассматривать в осях, совпадающих с направлением действия главных напряжений. Если принять ассоциированный закон пластического течения (принцип нормальности), то приращение пластических деформаций будет нормальным к поверхности текучести (пластического потенциала). На рис. 2 представлены критерии (1), (11) и (13), а также вектора приращений пластических деформаций в случае принятия ассоциированного закона пластического течения.

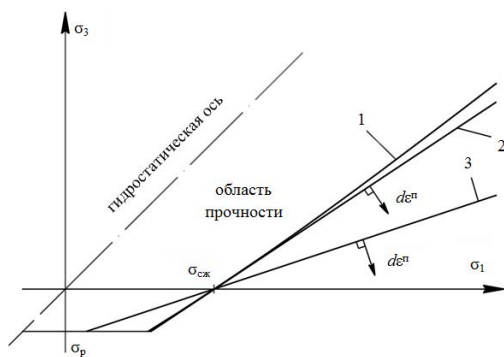


Рис. 2. Критерии прочности (пластичности):

$$1 - \sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi \sigma_1}{C}}; \quad 2 - \sigma_1 = \sigma_{\text{сж}} + [1 + \sin \varphi] \sigma_3;$$

$$3 - \sigma_1 = \sigma_{\text{сж}} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3$$

Для оценки объемных изменений при пластическом деформировании используется так называемый коэффициент дилатансии, представляющий собой котангенс угла наклона паспорта прочности β (при ассоциированном законе пластического течения) к оси σ_1 (см. рис. 2). Значение коэффициента дилатансии определяется выражением [5]:

$$\operatorname{ctg} \beta = \left| \frac{d\varepsilon_3^{\text{п}}}{d\varepsilon_1^{\text{п}}} \right|, \quad (14)$$

где $\operatorname{ctg} \beta$ – коэффициент дилатансии; $d\varepsilon_1^{\text{п}}, d\varepsilon_3^{\text{п}}$ – приращения пластических деформаций по направлениям главных осей.

В случае, когда коэффициент дилатансии равен единице, пластическое течение называется *эквиволюминальным* (равнообъемным). Такое деформирование характерно для материалов пластического разрушения.

Приращения пластических деформаций определяется по формулам [4]:

$$d\varepsilon_1^{\text{п}} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1}, \quad d\varepsilon_3^{\text{п}} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3}, \quad (15)$$

где λ – постоянная; Q – функция пластического потенциала (условие пластичности или прочности (1, 11, 13) с нулем в правой части).

Согласно уравнениям (14, 15) коэффициент дилатансии для поверхности текучести в виде (11) равен:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (16)$$

Коэффициент дилатансии для линейризованного критерия (13) равен:

$$\operatorname{ctg} \beta = 1 + \sin \varphi. \quad (17)$$

Увеличение объема при пластическом деформировании, согласно (16), дает завышенную величину, что противоречит экспериментальным данным [6]. Для устранения данного несоответствия прибегают к искусственному уменьшению приращения объема пластических деформаций посредством необоснованной замены угла внутреннего трения в критерии (11) так называемым углом дилатансии i или его максимальным значением i_0 при отсутствии нормального напряжения на площадке среза (при разрушении трещины i_0 будет стремиться к углу подъема неровностей контактирующих поверхностей). В общем случае величина дилатансии является производной $d\delta_n / d\delta_s$ (где δ_n, δ_s – величины нормального и касательного сдвига, соответственно). Лейхтниц и Ербан получили максимальное значение угла дилатансии на трещине в пределах 10–20° [6]. Подобным образом переходят к неассоциированному закону пластического течения.

Для неассоциированного закона пластического течения в нашем случае, то есть для соответствия критериев (11) и (13), а также равенства коэффициентов дилатансии (16) и (17), при углах внутреннего трения 35, 30, 20°, углы дилатансии должны быть приняты равными 12,8, 11,5, 8,4° соответственно.

Выше указывалось на отсутствие реали-

зации механизма трения на площадке среза от действия минимального главного напряжения, что обосновано аналитически, однако физические предпосылки данного феномена объяснить достаточно сложно.

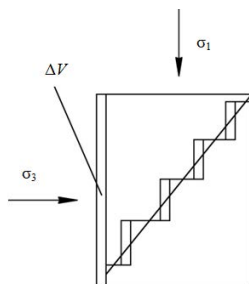


Рис. 3. Схема пластического деформирования и разрушения образца

Можно предположить, что его сущность заключается в принципиальном отличии упругого и пластического деформирования, а

именно в дилатансии. Как при упругом, так и при пластическом деформировании, в направлении максимального главного сжимающего напряжения происходит уменьшение размера образца, а в направлении минимального – расширение. При упругом деформировании не происходит увеличения объема (явление дилатансии не наблюдается), и поэтому деформирование происходит в «естественной упаковке» с полным контактом между зернами образца. В случае пластического деформирования происходит разуплотнение зерен, и поэтому в направлении расширения (увеличения объема ΔV), по-видимому, теряется контакт (рис. 3), что и объясняет отсутствие проявления механизма трения в предельном равновесии от действия минимального главного напряжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жабко А. В. Напряженное состояние земной коры // Известия УГГУ. 2014. № 3(35). С. 57–60.
2. Zhabko A.V. Calculation theory of stability of foundations and slopes // Proceedings XV International ISM Congress 2013. 16–20 September 2013, Aachen, Germany. pp. 85–97.
3. Жабко А. В. Основы общей теории расчета устойчивости откосов // Известия УГГУ. 2013. № 4(32). С. 47–58.
4. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. 221 с.
5. Прочность и деформируемость горных пород / Ю. М. Карташов [и др.]. М.: Недра, 1979. 269 с.
6. Кашников Ю. А., Ашихмин С. Г. Механика горных пород при разработке месторождений углеводородного сырья. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2007. 467 с.

Поступила в редакцию 11 ноября 2014 г.

Жабко Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: zhabkoav@mail.ru