

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗДЕЛЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В СЕПАРАТОРЕ ПО ТРЕНИЮ И УПРУГОСТИ

Ляпцев С. А., Потапов В. Я., Потапов В. В., Семериков Л. А., Беридзе Е. Т.

Представлена конструкция сепаратора по трению и упругости. Приведены математические уравнения, описывающие поведения частиц горной массы на наклонной поверхности узла стратификации и повторяющихся ударах свободно падающих частиц о наклонные поверхности отражающих элементов.

*Ключевые слова:* сепаратор; дифференциальные уравнения; математическое моделирование; зависимости.

Сепаратор СПРУТ [1] предназначен для разделения сыпучих материалов на основе различий в коэффициентах трения и восстановления горных пород. Сепаратор включает: корпус 1 с загрузочным лотком в виде наклонной плоскости с трамплином 2 и отражательными элементами 3, закрепленные консольно в раме 4 (рис. 1).

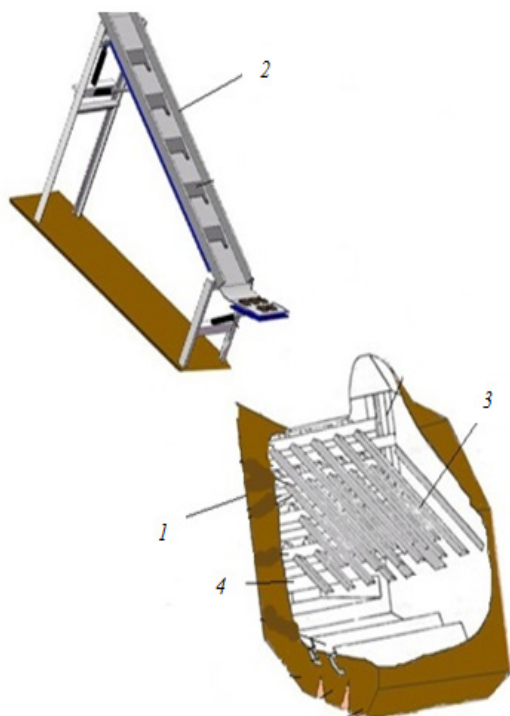


Рис. 1. Схема аппарата СПРУТ:  
1 – корпус сепаратора; 2 – наклонный желоб;  
3 – отражательные элементы; 4 – рама

Разделение сыпучих материалов в сепараторе СПРУТ осуществляется поэтапно: исходный продукт подается на поверхность лотка, который обеспечивает не только по-

дачу материала в зону разделения, но и подготавливает материал с различными коэффициентами трения к разделению. После прохождения по лотку сформированный поток продуктов в виде веера подается на ярусно расположенные отражательные элементы, установленные таким образом, чтобы обеспечить полное ударное взаимодействие с исходным материалом. В результате этого взаимодействия образуется продольный веер разделяемых частиц материала. Неупругая (обогащенная) фракция располагается в начальной зоне веера, упругая (обедненная) – на противоположном его краю.

Конструкцией модели сепаратора предусмотрена возможность изменения следующих параметров: схемы пространственного расположения отражающих элементов; угла наклона элемента к горизонту; расстояния между ярусами элементов; расстояния от нижней кромки загрузочного желоба до верхнего яруса элементов; положения отсекающих шибберов.

Процесс движения каждой частицы возможно описать математической моделью, включающей уравнения движения на каждом этапе разделения и дифференциальные уравнения движения частицы в циркулирующем потоке воздуха [2, 3, 4].

Свободный полет частицы начинается из точки В со скоростью  $V_B$ , направленной по касательной к дуге окружности трамплина в данной точке. Если частица при движении коснется поверхности отражательных элементов, то произойдет удар.

Таким образом, для математического описания движения частицы в сепараторе СПРУТ необходимо: составить уравнения, позволяющие определить скорость частицы в конце наклонной плоскости (в точке А) и в конце дуги окружности (в точке В); записать дифференциальные уравнения движения частицы в циркулирующем потоке и проинтегрировать их; составить соотношения для определения скорости частицы после ее удара об отражательные элементы.

После удара частица вновь переходит в полет в циркулирующем потоке, затем опять возможен удар и свободный полет до тех пор, пока частица не выйдет из зоны сепарации.

Множество вариантов движения частицы при различных значениях исходных параметров убеждает в необходимости проведения математического эксперимента на ЭВМ. Это позволит не только предсказать поведение в сепараторе частиц с различным содержанием полезного компонента, но и подобрать наиболее рациональные конструктивные параметры самого сепаратора.

Рассмотрим движение частицы по углу стратификации. Получив скорость, равную  $V_A$ , частица выходит на криволинейный участок дуги АВ (рис. 2).

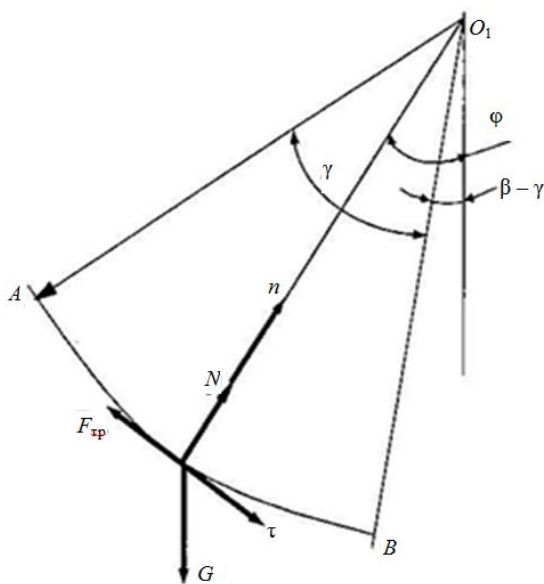


Рис. 2. Силы, действующие на частицу при движении по дуге окружности

Для определения скорости частицы  $V_B$  в точке В составим дифференциальные уравнения движения частицы в проекциях на оси естественной системы координат ( $\tau, n$ ):

$$\begin{cases} m \cdot \frac{dV}{dt} = mg \cdot \sin \varphi - F_{\text{тр}}, \\ m \cdot \frac{V^2}{r} = N - mg \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Решая систему (1), получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{2} U'_\varphi + fU = g(\sin \varphi - f \cos \varphi), \quad (2)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид:

$$U = Ce^{-2f\varphi} - \frac{2g(2f^2 + 1)}{4f^2 + 1} \cos \varphi + \frac{2gf}{4f^2 + 1} \sin \varphi, \quad (3)$$

где  $C = 2ge^{2\beta}[L/r(\sin \beta - f \cos \beta) - [f \sin \beta - (2f^2 + 1) \cos \beta]/(4f^2 + 1)]$ .

Скорость частицы в конце криволинейного участка:

$$V_B^2 = 2gL(\sin \beta - f_{\text{ск}} \cdot \cos \beta) \cdot e^{2f_{\text{ск}}} + \frac{2gr}{4f_{\text{ск}}^2 + 1} \times \{f_{\text{ск}} \cdot [\sin(\beta - \gamma) - e^{2f_{\text{ск}}} \sin \beta] + (2f_{\text{ск}}^2 + 1) \cdot [e^{2f_{\text{ск}}} \cos \beta - \cos(\beta - \gamma)]\}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – угол наклонной касательной к данной криволинейной поверхности в точке В;  $R_1$  – её радиус, м.

На следующем участке частицы выходят на выпуклую криволинейную поверхность – дефлектор (рис. 3). На подвижную частицу действуют сила тяжести  $G$  и реакция криволинейной поверхности (нормальная составляющая  $N$ , касательная –  $F_{\text{тр}}$ ).

Уравнения движения частиц по дефлектору в естественной форме (в проекциях на оси  $\tau$  и  $n$ ) имеют вид:

$$\begin{cases} ma_\tau = -mg \cos \varphi - F_{\text{тр}} \\ ma_n = -N + mg \sin \varphi, \end{cases} \quad (5)$$

где  $a_\tau = dV_\tau / dt = R_2 d^2\varphi / dt^2$  – касательное ускорение,  $a_n = V_\tau^2 / R = R_2 (d\varphi / dt)^2$  – нормальное ускорение;  $R_2$  – радиус дефлектора, м.

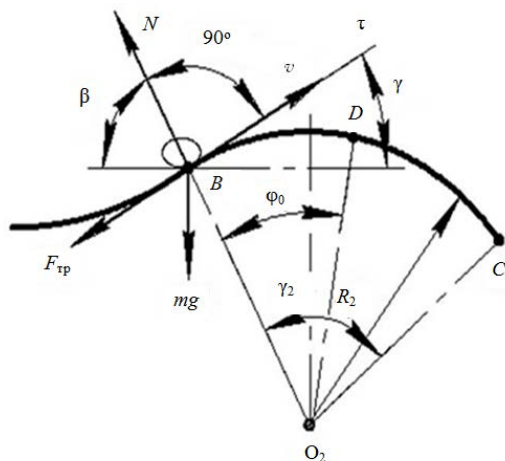


Рис. 3. Схема движения частиц по поверхности дефлектора

Возможны два типа движения частицы по дефлектору. Первый соответствует безотрывному движению по его поверхности при небольших скоростях движения. Во втором случае возможен отрыв частицы от поверхности дефлектора из-за воздействия центробежной силы инерции. Для определения момента отрыва аналитически проинтегрирована указанная система уравнений. Величина силы трения при скольжении частицы:

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{ск}} N,$$

где  $N$  определяется из второго уравнения системы (5) в виде:

$$N = mg \sin \varphi - \frac{mV_\tau^2}{R_2}. \quad (6)$$

Тогда первое уравнение этой системы может рассматриваться как линейное неоднородное уравнение:

$$U' - 2U = -g (\cos \varphi + f_{\text{ск}} \sin \varphi), \quad (7)$$

где через  $U'$  обозначена величина

$$U = \frac{V_c^2}{2R_2}. \quad (8)$$

Решение дифференциального уравнения (7) может быть представлено суммой общего

решения однородной его части:

$$U'_{\text{ц}} - 2U = 0 \Rightarrow U_{\text{одн}} = Ce^{2\varphi} \quad (9)$$

и частного решения

$$U_{\text{част}} = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (10)$$

неопределенные коэффициенты которого находятся из уравнения (7).

После подстановки в общее решение

$$U = U_{\text{одн}} + U_{\text{част}} \quad (11)$$

начальных условий  $\varphi_0 = \gamma$  и  $U_0 = V_B^2 / R_2$  получим выражение, определяющее в конечном виде величину (8), входящую в выражение для нормальной составляющей силы реакции (6).

Отрыв частицы от поверхности дефлектора произойдет при условии  $N = 0$ , т. е.:

$$g \sin \varphi - U = 0. \quad (12)$$

Отсюда получается трансцендентное уравнение, определяющее угол отрыва частицы от дефлектора:

$$\sin \varphi = \frac{R_2}{g} e^{2f_{\text{ск}}(\varphi - \varphi_0)} \times \left\{ \omega_0^2 - \frac{2g}{R_2(4f_{\text{ск}}^2 + 1)} \left[ \sin \gamma (2f_{\text{ск}}^2 - 1) + 3f_{\text{ск}} \cos \gamma \right] \right\} + \frac{2g}{R_2(4f_{\text{ск}}^2 + 1)} \left[ \sin \varphi (2f_{\text{ск}}^2 - 1) \right] + 3f_{\text{ск}} \cos \varphi, \quad (13)$$

где  $\omega_0 = \frac{V_B}{R_2}$ .

В результате интегрирования получены значения угла отрыва частицы от дефлектора и ее скорости в этот момент.

Условие отрыва частицы от трамплина имеет вид:

$$\text{при } G < \frac{mV_0^2}{R_2} \text{ или } V_0 > \sqrt{gR_2} \quad (14)$$

Если дуга  $BC$  симметричная, то при неотрывном движении частиц условие ее схода с криволинейной поверхности:

$$VC > 0. \quad (15)$$

По закону сохранения энергии:

$$E_0 = E_c + E_{\text{тр}}, \quad (16)$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_C^2}{2} + \int_B^C F_{\text{тр}} dl, \quad (17)$$

где  $l$  – длина окружности, м.

Для обеспечения условия (13) необходимо, чтобы в верхней точке  $D$  дуги  $BC$  кинетическая энергия частицы превышала работу сил сопротивления движению на пути  $DC$ :

$$mgf_{\text{ск}} R_2 \int_0^{\alpha} \cos \alpha d\alpha < \frac{mV_D^2}{2}. \quad (18)$$

Используя неравенство (18) и закон сохранения энергии, можно получить условия безотрывного движения частицы по дуге  $BC$ :

$$mV_B^2 > 2R_2 \left[ (1 - \cos f) mg + 2mgf_{\text{ск}} \int_0^f \cos \alpha d\alpha \right]. \quad (19)$$

Если дугу  $BC$  ограничить в точке  $D$ , то в этом случае частицы падают вниз с начальной скоростью  $V_y = 0$  и минимальной скоростью по оси  $x$ .

Условие безотрывочного и безостановочного движения частицы до точки  $D$  (находится из закона сохранения энергии):

$$mV_B^2 > 2R_2 \left[ (1 - \cos \varphi) mg + mgf_{\text{ск}} \int_0^{\varphi} \cos \alpha d\alpha \right]. \quad (20)$$

Для обеспечения движения частицы с отрывом от дефлектора и без встречи ее с последним необходимо выполнить условие:

$$\frac{m(V_B \sin \alpha)^2}{2} > mg(1 - \cos \alpha) R_2^2,$$

$$V_B > \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi}} R_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2gR_2}{(1 + \cos \varphi)}}.$$

Как указывалось выше, участков свободного полета у частицы возможно несколько. Первый из них соответствует вылету частицы с криволинейного трамплина со скоростью  $V_B$  под углом  $(\beta - \gamma)$  к горизонтали (рис. 4). Поэтому проекции начальной скорости на этом участке на оси координат системы  $xOy$  имеют вид:

$$\begin{cases} V_x = V_B \cos(\beta - \gamma); \\ V_y = V_B \sin(\beta - \gamma). \end{cases} \quad (21)$$

Координаты точки начала полета опреде-

ляются через параметры полки и криволинейного трамплина:

$$\begin{cases} x_B = L \cos \beta + r \sin \beta - r \sin(\beta - \gamma), \\ y_B = L \sin \beta - r \cos(\beta - \gamma) - r \cos \beta. \end{cases} \quad (22)$$

Если сопротивление движению при свободном полете отсутствует, то частица движется с ускорением свободного падения  $g$ , направленным параллельно оси  $Oy$ , поэтому движение вдоль оси  $Ox$  равномерное, а вдоль оси  $Oy$  – равноускоренное. В этом случае имеем:

$$\begin{cases} x = x_B + V_x t, \\ y = y_B + V_y t + 0,5gt^2. \end{cases} \quad (23)$$

Следовательно, движение частицы происходит по параболе

$$y = y_B + \text{tg}(\beta - \gamma)(x - x_B) + [g(x - x_B)^2] / V_B^2 \cos^2(\beta - \gamma). \quad (24)$$

Конечными условиями для участка свободного полета являются условия соударения с одним из отражательных элементов.

Положение  $i$ -го отражательного элемента характеризуется следующими геометрическими параметрами: его длиной  $l$  и шириной боковой грани  $b$ , м; координатами  $y_i, z_i$  вершины двухгранного угла  $\theta$  в месте его крепления, м; углом наклона  $\gamma$  элемента к горизонтали (рис. 4).

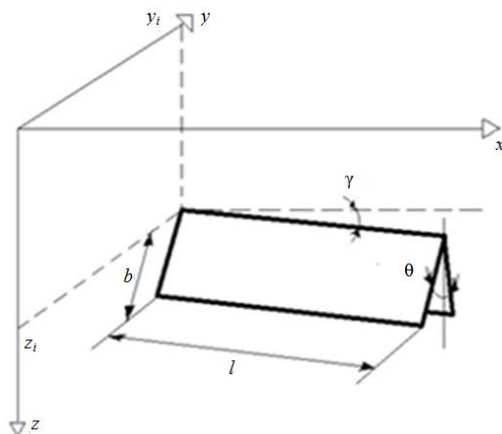


Рис. 4. Геометрические параметры отражательного элемента

В каждый момент времени полета частицы выполняются проверки: нахождение

ближайшего элемента; сравнение координат частицы с координатами этого отражательного элемента; проверка возможности взаимодействия частицы с боковой плоскостью сепаратора.

Встреча с элементом фиксируется, в случае если расстояние между частицей и плоскостью грани  $i$ -го отражательного элемента не превосходит задаваемой погрешности  $\varepsilon$ :

$$\left| x \sin \frac{\theta}{2} \sin \gamma \pm (y - y_i) \cos \frac{\theta}{2} - (z - z_i) \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma \right| \leq \varepsilon \quad (25)$$

(знаки  $\pm$  соответствуют правой (+) и левой (-) грани отражательного элемента). При этом в силу ограниченности длины элемента и ширины его грани, а также в силу расположения отражательного элемента выпуклостью вверх, условие контакта с плоскостями грани должно соответствовать неравенствам:

$$\begin{cases} z > z_i + x \operatorname{tg} \gamma, \\ \frac{x}{\cos \gamma} < 1, \\ (y - y_i)^2 + (z - z_i - x \operatorname{tg} \gamma)^2 < b^2. \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, процесс интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающих свободный полет частицы, прекращается для тех координат частицы ( $x_k, y_k, z_k$ ) и той грани отражательного элемента, которые удовлетворяют системе неравенств (25)–(26). Если при этом хотя бы одно из неравенств для всех  $x, y, z$  не выполняется, частица вылетает из зоны ударного разделения, не коснувшись ни одного из отражательных элементов.

Для определения скорости частицы после соударения с плоскостью отражательного элемента применяем теорему об изменении количества движения при ударе [2, 3]:

$$m\vec{U} - m\vec{V} = S_N \cdot \vec{n} - S_{TP} \cdot \vec{\tau}, \quad (27)$$

где  $\vec{V}$  – вектор скорости частицы в конце участка свободного полета в точке ( $x_k, y_k, z_k$ );  $\vec{U}$  – скорость частицы после удара;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости грани, с которой произошел контакт;  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной, направленный вдоль линии пересечения плоскости удара с

плоскостью грани;  $S_N, S_P$  – величины ударных импульсов нормальной реакции  $N$  и силы трения скольжения, причем  $S_{TP} = f_j S_N$  в соответствии с гипотезой Рауса.

Для удобства векторного представления коэффициент восстановления  $k_j$  при ударе определяется из зависимости [2], записанной в виде скалярного произведения:

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = -k_j \vec{V} \cdot \vec{n} \quad (28)$$

Чтобы определить величину ударного импульса нормальной реакции грани отражательного элемента, умножим векторное уравнение (27) скалярно на единичный вектор нормали  $\vec{n}$ :

$$m\vec{U} \cdot \vec{n} - m\vec{V} \cdot \vec{n} = S_N \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} - S_{TP} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}. \quad (29)$$

Учитывая, что  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ ,  $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$ , а также используя соотношение (28), получим

$$S_N = -m(1 + k_j) \vec{V} \cdot \vec{n}. \quad (30)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (27) получим векторную зависимость, определяющую скорость частицы после удара:

$$\vec{U} = \vec{V} - (1 + k_j) \cdot V_N \cdot \vec{n} \cdot (\vec{n} - f_j \vec{\tau}), \quad (31)$$

из которой нетрудно определить проекции скорости  $\vec{U}$  на оси координат  $x, y, z$ , являющейся начальной скоростью на новом участке свободного полета:

$$\begin{cases} U_x = V_x - (1 + k_j) \cdot (V_x n_x + V_y n_y + V_z n_z) \cdot (n_x - f_j \tau_x) \\ U_y = V_y - (1 + k_j) \cdot (V_x n_x + V_y n_y + V_z n_z) \cdot (n_y - f_j \tau_y) \\ U_z = V_z - (1 + k_j) \cdot (V_x n_x + V_y n_y + V_z n_z) \cdot (n_z - f_j \tau_z) \end{cases} \quad (32)$$

Для удобства пользования формулами (32) определены проекции входящих в нее векторов через кинематические параметры частицы и геометрические параметры грани. Единичный вектор нормали  $\vec{n}$ , перпендикулярный плоскостям граней отражательного элемента (25), имеет проекции:

$$\begin{cases} n_x = \sin \frac{\theta}{2} \sin \gamma, \\ n_y = \pm \cos \frac{\theta}{2}, \\ n_z = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma. \end{cases} \quad (33)$$



Единичный вектор касательной  $\vec{\tau}$  можно найти из выражения двойного векторного произведения:

$$\vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{b}, \quad (34)$$

где  $\vec{b}$  – вектор бинормали:

$$\vec{b} = \frac{\vec{V}}{V} \times \vec{n}, \quad (35)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (36)$$

Из уравнения (35) следует:

$$\begin{cases} b_x = \frac{1}{V}(V_y n_z - V_z n_y) \\ b_y = \frac{1}{V}(V_z n_x - V_x n_z) \\ b_z = \frac{1}{V}(V_x n_y - V_y n_x) \end{cases} \quad (37)$$

а из уравнения (34) находим проекции вектора  $\vec{\tau}$  на выбранные оси координат:

$$\begin{cases} \tau_x = n_y b_z - n_z b_y, \\ \tau_y = n_z b_x - n_x b_z, \\ \tau_z = n_x b_y - n_y b_x. \end{cases} \quad (38)$$

Отскок от грани отражательного элемента может и не произойти, если угол отражения близок к  $90^\circ$ . В этом случае из-за неровности поверхности частиц начнется их скольжение по плоскости грани. При этом скорость частицы будет убывать до тех пор, пока частица не покинет боковую поверхность грани. Если принять угловую погрешность расчетов равной  $\eta$ , то критерием начала скольжения по боковой поверхности грани может служить неравенство  $U_n \leq U_\tau \cdot \operatorname{tg} \eta$ , то есть

$$\begin{aligned} & U_x n_x + U_y n_y + U_z n_z \leq \\ & \leq (U_x \tau_x + U_y \tau_y + U_z \tau_z) \cdot \operatorname{tg} \eta. \end{aligned} \quad (39)$$

В этих условиях происходит не свободное, а стесненное движение частицы по плоскости грани:

$$\begin{aligned} & x \sin \frac{\theta}{2} \sin \gamma \pm (y - y_i) \cos \frac{\theta}{2} - \\ & - (z - z_i) \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение данного движения включает уравнение связи (40) и три дифференциальных уравнения, составленных на основе второго закона Ньютона для частицы:

$$m \cdot \vec{a} = m\vec{g} + N\vec{n} - f_j N \frac{\vec{V}}{V},$$

где  $m$  – масса частицы;  $\vec{a}$  – её ускорение;  $N$  и  $f_j N$  – величины нормальной реакции и силы трения скольжения, соответственно;  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения;  $\vec{n}$  и  $\vec{V}/V$  – направляющие вектора нормали к плоскости и касательной к траектории движения на плоскости.

Величину нормальной реакции  $N$  нетрудно найти из уравнения (41), спроектировав его на нормаль  $\vec{n}$ :

$$m \cdot \vec{a} \cdot \vec{n} = m\vec{g} \cdot \vec{n} + N\vec{n} \cdot \vec{n} - f_j N \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{V},$$

откуда с учетом, что  $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$  и  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ , получим

$$N = -m\vec{g} \cdot \vec{n} = mg \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma. \quad (42)$$

Таким образом, уравнениями движения частицы по грани отражательного элемента являются следующие:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma (\sin \frac{\theta}{2} \sin \gamma - f_j \frac{\dot{x}}{V}), \\ \ddot{z} = g - g \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma (\sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma - f_j \frac{\dot{z}}{V}), \end{cases} \quad (43)$$

где  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + V_y^2 + \dot{z}^2}$ ,  $V_y = \pm \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\dot{z} \cos \gamma - \dot{x} \sin \gamma)$ .

Интегрирование системы уравнений (43) следует вести до тех пор, пока частица не дойдет до нижней кромки грани, т. е. при

$$\dot{x} = U_x; \quad \dot{z} = U_z \quad (44)$$

Начальными условиями для системы уравнений (43) являются значения проекций скорости

$$|z \cos \gamma - b - x \sin \gamma| \leq \varepsilon. \quad (45)$$

и координат точки контакта с гранью  $x_k, z_k$ . Частица покидает поверхность грани в точке

$L$ , координаты которой  $x_L, z_L$  удовлетворяют неравенству (44), а  $y_L$  определяется из уравнения (40) в виде:

$$y_L = y_i \pm \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} [(z - z_i) \cos \gamma - x \sin \gamma]. \quad (46)$$

Таким образом, выражения (32) могут служить начальными значениями скорости на следующем участке свободного полета из точки соударения с координатами  $(x_k, y_k, z_k)$ .

В случае скольжения частицы по грани свободный полет начинается в точке с координатами  $x_L, y_L, z_L$  со скоростью, проекции которой определяются из системы уравнений (43). Далее вновь следует обратиться к решению системы дифференциальных уравнений свободного полета частицы с новыми начальными условиями. Чередование процессов интегрирования дифференциальных уравнений с соударениями о грани отражательных элементов происходит до тех пор, пока частица не покинет зону ударного разделения.

Указанный алгоритм реализуется на ЭВМ со случайной выборкой начальных параметров движения (точки начала движения по наклонной плоскости и ее начальной скорости), а также случайным выбором параметров самой частицы (ее размеров и физических параметров трения и упругости). Блок-схема моделирования работы разделительного аппарата приведена на рис. 5. Результаты численного моделирования позволяют оценить эффективность разделения при выбранных конструктивных параметрах аппарата, а также выбрать их наиболее рациональные значения.

Организация вычислений при моделировании разделения частиц по различию в коэффициентах трения и упругих свойств заключается в следующем:

1. Моделируется разгон частиц по загрузочному лотку с учетом сил трения. Начальное положение частицы по ширине загрузочного лотка определяется генератором случайных чисел. Параметры частиц могут задаваться двумя способами: а) перебором по порядку дискретных значений параметров: для каждого сочетания параметров (типа ча-

стиц) реализуется несколько траекторий; б) генерированием случайной последовательности типов частиц в соответствии с заданным распределением частиц по вещественному и фракционному составу.

2. Моделируется траектория свободного полета частиц до встречи с отражательным элементом. Элементы траектории рассчитываются дискретно с автоматическим выбором шага по времени.

3. Определяются момент и координаты точки встречи частицы с отражающим элементом, боковой стенкой или дном.

4. Определяются условия перехода на скольжение. В случае перехода дальше рассчитывается траектория скольжения. В противном случае определяются траектории после отскока.

5. После взаимодействия с отражательным элементом повторяются вычисления по п. 2 до следующей встречи с элементом. Вычисления прекращаются при полной потере частицей начальной высоты. Блок-схема алгоритма моделирования приведена на рис. 5.

6. В процессе моделирования накапливается статистика о координатах частицы в момент падения на дно.

7. Для каждого типа частиц рассчитывается средняя длина траектории. Различие координат позволяет судить о разделении частиц по размерам и другим признакам. Результат выдается в виде таблицы и графика.

8. Путем изменения конструктивных параметров и анализа результатов осуществляется выбор их рациональных значений.

Теоретические исследования свидетельствуют о сложной траектории движения частиц в пространстве разделительного аппарата. Однако конечным результатом является концентрация неупругой и упругой фракций в различных частях аппарата. Поэтому в качестве основного оценочного показателя может быть принята разница между местом падения частиц породы и волокна от вертикальной линии отсчета.

В результате имитационного моделирования установлено, что наибольшее влияние на показатель разделения оказывает измене-

ние угла наклона загрузочного желоба. Так при скорости подачи исходного продукта  $V_0 = 1,0$  м/с увеличение угла наклона с  $40$  до  $55^\circ$  снижает показатель разделения в 4 раза.

Такая же закономерность имеет место при  $V_0 = 0,5; 1,5; 2,0$  м/с. С учетом ограниченного расстояния падения породных частиц лучшие условия разделения обеспечиваются

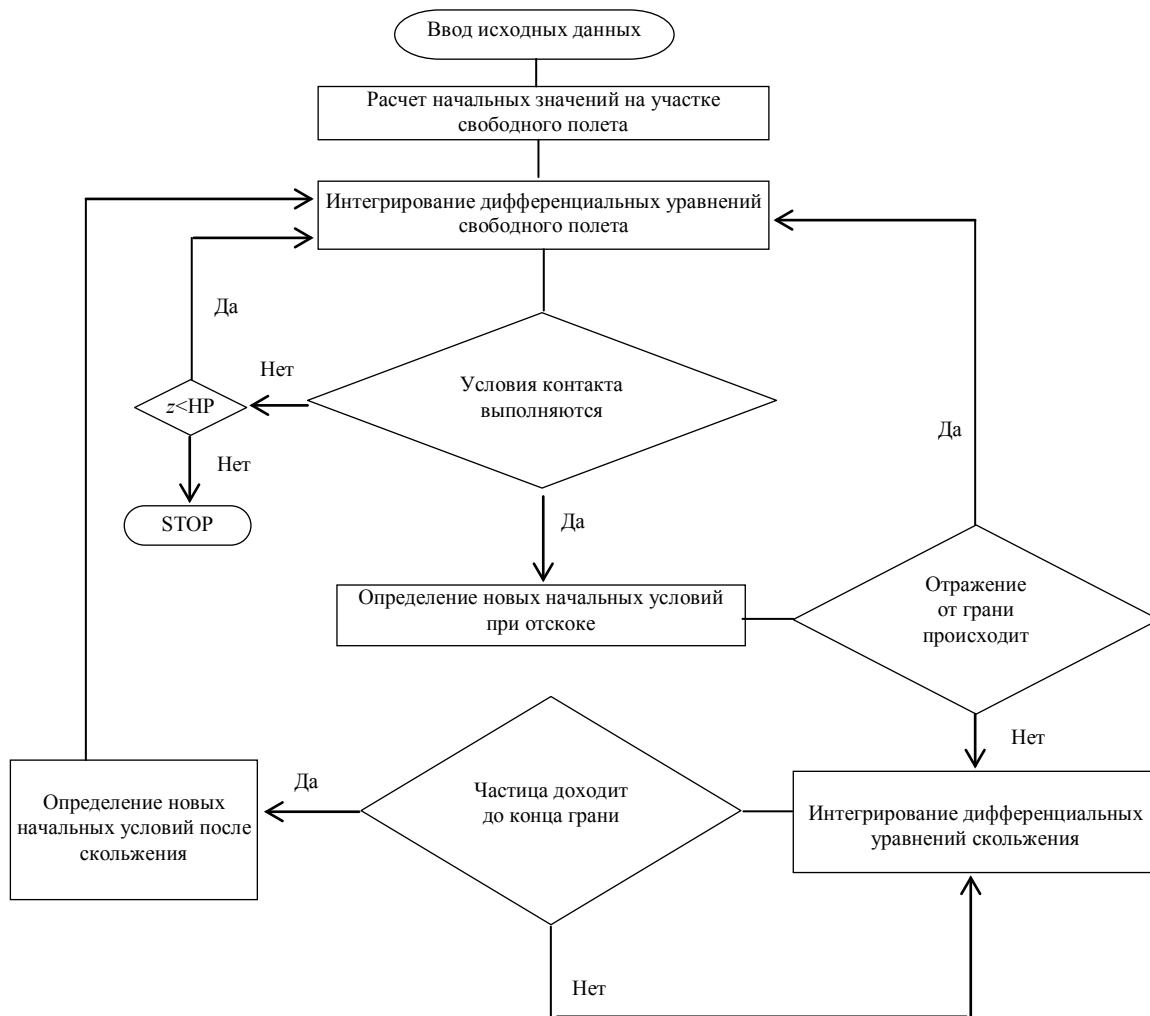


Рис. 5. Алгоритм моделирования процесса движения частицы в разделительном аппарате

при углах наклона загрузочного желоба в интервале  $40-45^\circ$  при  $V_0 = 0,5 \dots 1,0$  м/с. При постоянном угле наклона загрузочного желоба изменение скорости подачи исходного материала в интервале от  $0,5$  до  $2,0$  м/с существенно не влияет на разделение продуктов по трению. С увеличением длины желоба показатель разделения повышается в  $1,5-2$  раза, но при этом увеличивается дальность падения породы от точки отсчета. В этом случае габариты аппарата могут увеличиваться как по высоте, так и по длине.

Расчеты показывают, что для обеспече-

ния контакта всех частиц потока материала с поверхностью рабочих элементов необходимо их расположить, как минимум, в два яруса, причем ширина щели между соседними элементами должна быть меньше или равна ширине элемента.

Траектория движения частицы после отражения от поверхности элемента определяется параметрами движения частицы в момент взаимодействия с поверхностью разделительного элемента, параметрами отражающей плоскости, а также параметрами частиц, которые характеризуются их упругими



свойствами и коэффициентом трения. Первые две группы параметров являются регулируемы, третья группа параметров определяет характер траектории частиц после их ударного взаимодействия с наклонной поверхностью элемента. Анализ параметров движения частиц на различных участках траектории в точках соударения с элементами показывает следующее:

1. Породные частицы крупностью более 2 мм в момент первого удара имеют скорости, равные (4,5–5,0) м/с. После удара скорость уменьшается до 3,4–3,8 м/с. Направление движения частиц в плане изменяется в среднем на угол  $31^\circ$  от оси  $y$  (продольной оси отражающих элементов). На породные частицы менее 2 мм значительное влияние оказывает сопротивление воздуха, поэтому скорость их падения в момент первого удара меньше, чем у крупных частиц. Так, у частиц размером 1 мм скорость падения в момент первого удара равна 4,0–4,1 м/с. Соответственно снижается скорость отражения.

2. Нераспушенные агрегаты асбеста («пешка») в момент первого удара имеют угол падения несколько больший, чем у породы, равный  $63$ – $64^\circ$  и скорость 4,0–4,5 м/с. После удара скорость уменьшается до 2,5–3) м/с. Изменение направления движения от оси  $y$  составляет  $31$ – $32^\circ$ .

Породные частицы имеют большую упругость, поэтому при отражении получают большую скорость и движутся по более пологой траектории чем «пешка», которые движутся после удара по более крутой траектории.

3. Распушенные волокна после первого удара о поверхность элементов теряют скорость движения с 1,7–1,8 м/с до 0,4–0,5 м/с.

4. Анализ траектории движения частиц

после соударения с поверхностью элементов позволяет сделать весьма важный вывод: наиболее целесообразным следует считать взаимное расположение элементов, которое обеспечивает реализацию второго удара только для породных частиц.

5. Для всех значений двугранного угла с увеличением угла наклона элементов показатель разделения повышается и достигает максимальной величины при  $\gamma = 25^\circ$ . С дальнейшим увеличением угла наклона элементов показатель разделения падает.

Максимальные значения показателя разделения получены при двугранных углах  $\theta$  в интервалах  $90$ – $110^\circ$ .

6. Расстояние по вертикали между ярусами элементов в определенной мере взаимосвязано с шириной наклонной плоскости элемента. Эта взаимосвязь обусловлена необходимостью сохранения геометрических пропорций при изменении конструктивных параметров.

В интервале ширины элементов от 0,05 до 0,15 м показатель разделения практически не изменяется и равен 1,38–1,4 м. С дальнейшим увеличением ширины элементов показатель разделения снижается до 1,1 м для  $b = 0,3$  м. Наиболее рациональными можно считать ширину элементов  $b = 0,14$  – 0,15 м, что при двугранном угле  $\theta = 90^\circ$  соответствует уголку № 100 фасонного проката.

7. Скорость подачи частиц в загрузочный желоб должна составлять 1,0...1,5 м/с.

8. Минимальная рабочая длина отражательных элементов составляет 1,14 м с учетом рационального угла наклона  $\gamma = 25$ .

На основании проведенных исследований методом имитационного моделирования была предложена конструкция аппарата с учетом рассмотренных условий [2].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вебер Г. Э., Ляпцев С. А. Дополнительные главы механики для горных инженеров. Екатеринбург: УрГУ, 1998.
2. Ляпцев С. А., Потапов В. Я. Математическое описание поведения рудных частиц в воздушном потоке разделительных аппаратов // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 1. URL: [www.science-education.ru/101-5493](http://www.science-education.ru/101-5493).
3. Ляпцев С. А., Потапов В. Я., Афанасьев А. И. Аппараты для разделения горных пород по упруго-фрикционным свойствам. LAP LAMBERT Academic Publishing, Deutschland, Saarbrücken 2014. 90 с.
4. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. СПб., 2010. 720 с.

5. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 331 с.
6. Методика определения упругих и фрикционных характеристик сыпучих материалов / В. Я. Потапов [и др.] // Изв. вузов. Горный журнал. 1998. № 5–6. С. 103–108.
7. Сепаратор для разделения материалов по трению и упругости / В. Я. Потапов [и др.] // Патент РФ № 111780, 2011. Бюл. № 36126.

Поступила в редакцию 20 октября 2014 г.

**Ляпцев Сергей Андреевич** – доктор технических наук, заведующий кафедрой технической механики, профессор. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: gmftm@ursmu.ru

**Потапов Валентин Яковлевич** – доктор технических наук, профессор кафедры горной механики, доцент. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: 2cl@inbox.ru

**Потапов Владимир Валентинович** – кандидат технических наук, доцент кафедры горной механики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет.

**Семериков Леонтий Андреевич** – аспирант кафедры горной механики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет.

**Беридзе Елизавета Тимуровна** – инженер кафедры горной механики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет.