УДК 622.83

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Жабко А. В.

Статья посвящена аналитическому определению естественного поля напряжений в земной коре. На основании ранее выполненных автором исследований выводится условие равновесия призмы смещения, а также обосновывается геометрия наиболее опасной поверхности скольжения. Предложен критерий предельного равновесия (прочности). Полученные расчетные зависимости для начального поля естественных напряжений основываются на упруго-пластическом характере деформирования горных пород.

Ключевые слова: *условие равновесия; функционал; дифференциальное уравнение; напряженное состояние; критерий прочности; гравитационная и тектоническая компоненты поля горизонтальных напряжений.*

Определение первоначального уровня естественных напряжений массива горных пород является одной из приоритетных и фундаментальных задач горного дела, геомеханики, геодинамики, геологии и физики Земли. В геомеханике и горном деле знание распределения начальных полей напряжений необходимо, прежде всего, для расчета напряженно-деформированного состояния элементов систем разработки, определения их размеров, формы и расположения, обеспечения их устойчивости, а также определения нагрузок на крепь горных выработок. Вертикальная составляющая поля начальных напряжений с теоретической точки зрения определяется весом горных пород и глубиной ее расположения, что также подтверждается результатами экспериментальных исследований, в том числе в условиях тектонической активности. Поэтому дальнейшие рассуждения будут относиться к горизонтальной составляющей напряжений.

Первоначальное поле напряжений является суммой гравитационных и тектонических составляющих. В свою очередь гравитационная компонента поля начальных напряжений может быть представлена в виде суммы двух составляющих, которые условно можно назвать «упругая» и «пластическая». Под *упругой составляющей* поля начальных гравитационных напряжений следует понимать напряжение, вызванное невозможностью бокового (горизонтального) расширения пород под действием вертикальной компоненты (по А. Н. Диннику). *Пластическая составляющая поля* горизонтальных гравитационных напряжений создается под действием формирования в массиве призмы смещения, т. е. возникновения поверхностей скольжения. Поверхности (площадки) скольжения возникают начиная с некоторой глубины, зависящей от прочностных свойств и объемного веса массива горных пород. Для определения пластической составляющей горизонтальных напряжений необходимо располагать условием равновесия призмы смещения и геометрией наиболее опасной поверхности скольжения в массиве. Однако, как будет показано ниже, условие равновесия призмы смещения не является универсальным для произвольной формы поверхности скольжения и углов ее наклона.

Рассмотрим полупространство (толщу земной коры). Разобьем его вертикальным сечением на две части. Отбросим одну из них, заменяя ее действие по глубине эпюрой распределения горизонтальных главных напряжений. Таким образом, определение пластической (жесткопластической) составляющей компоненты горизонтальных напряжений сводится к определению этой эпюры, то есть определению закона распределения нормальных напряжений с глубиной.

В работах [1, 2] доказано, что условие равновесия призмы смещения в общем виде определяется уравнением

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)+\left(T'+fE'\right)y'\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0, \qquad (1)$$

где γ – объемный вес горных пород; $\hat{y}, y$ – функции линий откоса и поверхности скольжения, соответственно; y' – производная функции поверхности скольжения; T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения, соответственно, слева и справа; $f = \mathrm{tg}\,\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); С – сцепление массива горных пород; E', T' – соответственно производные функций нормальной и касательной составляющих межблоковой реакции.

В однородных массивах при углах наклона поверхности скольжения, превышающих угол внутреннего трения (ϑ ≥ φ), условие равновесия призмы смещения определяется уравнением [1, 2]:

$$\int\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)}{1+y'^2}\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (2)$$

Для участков с углами наклона поверхности скольжения к горизонту (ϑ < φ) условие равновесия имеет вид:

$$\int\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)}{1+fy'}\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) получены из уравнения (1). Причем условие (2) подразумевает присутствие и касательной, и нормальной составляющих межблоковой реакции, а уравнение (3) – только нормальной составляющей [1, 2].

Производные межблоковых реакций, входящие в условие равновесия (1) не могут принимать произвольные значения, а именно положительные. В противном случае работа межблоковых реакций на возможном перемещении системы станет положительной, что, в свою очередь, невозможно. Другими словами межблоковые реакции станут отрицательно влиять на устойчивость. И действительно, когда межблоковые реакции постоянны (не зависят от *x*), то они не совершают работу на возможном перемещении, а производная функции межблоковых реакций равна нулю. Таким образом, нулевое значение работы межблоковых реакций является ее экстремальным значением (максимальным), превысить которое она не может.

Если призма смещения находится в равновесии, то каждый ее отсек также уравновешен. Это, в частности, означает, что на возможном перемещении всей призмы смещения работы внутренних и внешних сил, действующих на отсек, равны. Удельная обобщенная внутренняя сила равна подынтегральному выражению (2) с обратным знаком, таким образом

$$F^i\left(x\right)=-\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)}{1+y'^2}, \qquad (4)$$

где $F^i(x)$ – удельная обобщенная внутренняя сила на возможном (горизонтальном) перемещении всей механической системы (призмы смещения).

В общем случае работа межблоковых реакций представляет собой сумму работ нормальных и касательных составляющих, которые не зависят друг от друга и являются заведомо отрицательными. Поэтому равенство нулю работы внутренних сил на возможном перемещении системы означает $E' = T' = 0$. Положим, в уравнении (1) $E' = T' = 0$, получим следующий функционал:

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\mathrm{C}\left(1+y'^2\right)\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (5)$$

Уравнения (2, 3, 5) позволяют оценить устойчивость откосов по произвольной поверхности скольжения.

Определим условия применения функционалов (2, 3, 5) в качестве условий равновесия. Для этого продифференцируем уравнение (4) по x и составим неравенство:

$$-\frac{dF^i}{dx}=\frac{\partial F^i}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}+\frac{\partial F^i}{\partial(\hat{y}-y)}\frac{d(\hat{y}-y)}{dx}=$$

$$=\gamma\left[y''(\hat{y}-y)\frac{1+2fy'-y'^2}{(1+y'^2)^2}+\frac{(\hat{y}'-y')(y'-f)}{1+y'^2}\right]>0, \quad (6)$$

где y'' – вторая производная функции поверхности скольжения по x.

Неравенство (6) определяет форму и углы наклона поверхности скольжения, при которых производные межблоковых реакций меньше нуля, то есть повышают устойчивость призмы смещения.

Несложно показать, что уравнение Л. Эйлера для функционала (2) [1, 2] не удовлетворяет неравенству (6) при $\hat{y}=\mathrm{const}$, то есть для полупространства. Поэтому для полупространства условие равновесия призмы смещения будет описываться функционалом (5).

Для определения наиболее опасной поверхности скольжения для функционала (5) необходимо решить следующую вариационную задачу:

$$\int\left[\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-\mathrm{C}(1+y'^2)\right]dx\to\max.$$

Примем $\hat{y}=H=\mathrm{const}$, тогда дифференциальное уравнение Л. Эйлера будет иметь вид:

$$(H-y)=-\frac{\mathrm{C}_1-(\mathrm{C}/\gamma)(y'^2-1)}{f}, \quad (7)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Очевидно, что подынтегральное выражение (5) при отсутствии внешних активных сил не может быть отрицательным, поэтому приравняем его к нулю и выразим из него высоту крайнего отсека $H-y$. После этого берется частная производная по производной функции поверхности скольжения и приравнивается нулю. В итоге определяем минимальную высоту отсека, при которой возможны появления площадок скольжения. Таким образом, имеем следующее граничное условие для построения поверхности скольжения:

$$y'(x_0)=f+\sqrt{1+f^2}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$H-y=H_{90}=\frac{2\mathrm{C}}{\gamma}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Заметим, что этот результат весьма очевиден и подтверждается неравенством (6). Из данного граничного условия произвольная постоянная в дифференциальном уравнении (7) $\mathrm{C}_1=0$. Таким образом, дифференциальное уравнение, определяющее функцию наиболее опасной поверхности скольжения для полупространства имеет вид:

$$(H-y)=\frac{\mathrm{C}}{\gamma}\frac{(y'^2-1)}{f}. \quad (8)$$

Пусть $y'=p$ – параметр, $H-y=h$ – глубина точки. Тогда тангенс угла наклона поверхности скольжения в точке, согласно (8), равен $\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{\mathrm{C}}}$. Для определения силового воздействия призмы смещения подставим уравнение (8) с соответствующими заменами в условие равновесия (5), получим выражение:

$$E_0=\frac{2\mathrm{C}^2}{\gamma f^2}\int\limits_{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{\mathrm{C}}}}\left(p^3-2fp^2-p\right)dp. \quad (9)$$

Для определения пластической составляющей горизонтальной компоненты проинтегрируем уравнение (9) и возьмем производную по глубине h:

$$\sigma_3=\frac{dE_0}{dh}=\gamma h-2\mathrm{C}\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{\mathrm{C}}}=$$

$$=\sigma_1-2\mathrm{C}\sqrt{1+\frac{\mathrm{tg}\,\varphi\,\sigma_1}{\mathrm{C}}}. \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет горизонтальную составляющую напряжений, необходимую для удержания призмы смещения в предельном равновесии (критерий прочности).

Как указывалось выше, горизонтальная компонента начальных гравитационных напряжений складывается из упругой и пластической (жесткопластической) составляющих, поэтому выражение для ее определения будет иметь вид:

$$\sigma_{\Gamma}=\frac{\nu}{1-\nu}\gamma h+\gamma h-2\mathrm{C}\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{\mathrm{C}}}=$$

$$\frac{1}{1-\nu}\gamma h - 2C\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{C}}, \qquad (11)$$

где ν – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), $\sigma_Г$ – горизонтальная компонента начальных гравитационных напряжений.

Как следует из формулы (11), максимальное отношение горизонтальной гравитационной компоненты к вертикальной ($\sigma_В = \gamma h$) может, в зависимости от механических и деформационных характеристик массива, достигать 2.

Таким образом, до глубины H_{90} распределение гравитационной компоненты горизонтальных напряжений происходит согласно закону А. Н. Динника. Ниже этой глубины на поле упругих напряжений накладывается поле пластических напряжений, а закон их общего распределения описывается уравнением (11). Отметим, что для учета тектонической компоненты горизонтальных напряжений к правой части уравнения (11) необходимо прибавить ее значение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zhabko A.V. Calculation theory of stability of foundations and slopes // Proceedings XV International ISM Congress 2013. 16–20 September 2013, Aachen, Germany. pp. 85–97.

2. Жабко А. В. Основы общей теории расчета устойчивости откосов // Изв. УГГУ. 2013. № 4(32). С. 47–58.

Поступила 27 июля 2014 г.

Жабко Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: zhabkoav@mail.ru