УДК 622.271.33/.451:624.121.537:625.033.38:627.43

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ

А. В. Жабко

В работе решена статически неопределимая задача по определению направления реакций между смежными отсеками. Выводятся основные уравнения условия равновесия призмы смещения. Получены дифференциальные уравнения, определяющие геометрию потенциальной поверхности скольжения. Построены поверхности скольжения и определены предельные параметры плоских однородных свободных откосов. Решение задачи дается на основе методов вариационного исчисления. Рассмотрены вопросы преломления поверхности скольжения в анизотропных и неоднородных горных массивах.

Ключевые слова: откос; условие равновесия; устойчивость; экстремум функционала; дифференциальное уравнение; поверхность скольжения; анизотропия; неоднородность; угол излома.

В настоящей работе излагается общая теория расчета устойчивости откосов, она является развитием, обобщением и уточнением некоторых работ автора [1–4].

Как известно, для равновесия плоской системы сил необходимо выполнение трех условий геометрической статики. С другой стороны, задачи статики весьма эффективно решаются при использовании общих принципов механики. Так, для равновесия механической системы с одной степенью свободы, согласно принципу возможных перемещений, необходимо и достаточно выполнение равенства [5]

$$\delta A_k^{\text{a}} + \sum \delta A_k^r = 0, \qquad (1)$$

где $\sum \delta A_k^{\text{a}}, \sum \delta A_k^r$ – сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил и реакций связей, соответственно, при любом возможном перемещении системы.

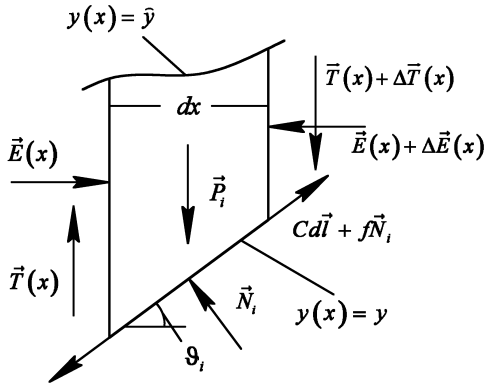

Рис. 1. Элементарный отсек и действующие на него силы

Введем систему координат (направление оси x – вправо, y – вверх) и рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы – призму смещения, состоящую из n материальных точек – центры масс элементарных отсеков (отсеки условно разделены вертикальными гранями). Выделим из призмы смещения произвольный отсек и рассмотрим его равновесие под действием приложенных активных сил и реакций связей (рис. 1). Условие равновесия для данного отсека представляется равенством

$$-E(x)\cos\vartheta_i\delta S_i + \big(E(x)+\Delta E(x)\big)\cos\vartheta_i\delta S_i - \\ -T(x)\sin\vartheta_i\delta S_i + +\big(T(x)+\Delta T(x)\big)\sin\vartheta_i\delta S_i + \qquad (2) \\ +P_i\sin\vartheta_i\delta S_i - R_i\delta S_i = 0,$$

где ϑ_i – угол наклона поверхности скольжения в точке; $E(x)$, $T(x)$ – соответственно функции нормальной и касательной составляющих реакций по боковым граням отсека; Δ – приращение функции; δS_i – возможное (виртуальное) перемещение отсека; P_i – вес отсека; R_i – сила сопротивления по площадке скольжения.

Для откоса с предельными геометрическими параметрами на площадке скольжения выполняется условие предельного равновесия

$$R_i = fN_i + Cdl = fN_i + C\frac{dx}{\cos\vartheta_i}, \qquad (3)$$

где $f = \operatorname{tg}\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); N_i – нормальная реакция площадки скольжения; C – сцепление массива горных пород; dl, dx – соответственно дифференциалы дуги и аргумента.

Составим условие равновесия по направлению нормали к площадке скольжения

$$N_i - P_i \cos\vartheta_i - \Delta T(x)\cos\vartheta_i + \Delta E(x)\sin\vartheta_i = 0. \quad (4)$$

Используя выражения (2), (3) и (4), запишем условие равновесия отсека в общем виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta E(x)(1 + f\,\mathrm{tg}\,\vartheta_i) + \Delta T(x)(\mathrm{tg}\,\vartheta_i - f) + \\ + P_i(\mathrm{tg}\,\vartheta_i - f) - C(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta_i)\,dx \end{bmatrix} \cos\vartheta_i \delta S_i = 0. \quad (5)$$

Преобразуем уравнение (5), используя соотношения

$$dx \to 0 \Rightarrow \Delta E(x) = dE(x) = dE,$$

$$\Delta T(x) = dT,\ \Delta E(x) = \frac{\partial E}{\partial x}dx = E'dx,$$

$$\Delta T(x) = T'dx.$$

$$\begin{bmatrix} E'(1 + f\,\mathrm{tg}\,\vartheta_i)\,dx + T'(\mathrm{tg}\,\vartheta_i - f)\,dx + \\ + P_i(\mathrm{tg}\,\vartheta_i - f) - C(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta_i)\,dx \end{bmatrix} \cos\vartheta_i \delta S_i = 0. \quad (6)$$

Запишем условие равновесия всей системы (призмы смещения), выразив возможное перемещение каждого отсека δS_i через возможное перемещение всей призмы $\delta S_{\text{ã}}$:

$$\delta S_i \cos\vartheta_i = \delta S_{\text{г}}.$$

Кроме того, учтем следующие соотношения:

$$P_i = \gamma(\hat{y} - y)\,dx,\ \mathrm{tg}\,\vartheta_i = y',$$

где γ – объемный вес горных пород; $\hat{y}, y$ – функции линий откоса и поверхности скольжения, соответственно; y' – производная функции поверхности скольжения.

Таким образом, имеем условие равновесия призмы смещения в виде:

$$\int \begin{bmatrix} \gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + \\ + E'(1 + fy') + T'(y' - f) \end{bmatrix} dx\delta S_{\text{г}} = 0. \quad (7)$$

Преобразуем условие равновесия (7) к виду

$$\int \left[\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + (T' + fE')y'\right]dx +$$
$$+ (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0, \quad (8)$$

где T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения, соответственно слева и справа.

Если в уравнении (7) принять $E' = T' = 0$, то получим функционал Ю. И. Соловьева [6], выведенный, как указывает Ю. И. Соловьев, из предположения гипотетического грунта Н. М. Герсеванова. Данный функционал на предмет геометрии поверхности скольжения был исследован А. Г. Дорфманом [7]. Однако заметим, что гипотетический грунт предусматривает отсутствие только касательных межблоковых реакций (общая реакция – горизонтальна). Выясним физический смысл функционала Ю. И. Соловьева:

$$\sum \frac{(\gamma h \sin\vartheta_i \cos\vartheta_i - f\gamma h \cos^2\vartheta_i - C)\,dl}{\cos\vartheta_i} =$$

$$= \sum \frac{(\tau - f\sigma_n - C)\,dl}{\cos\vartheta_i},$$

где τ, σ_n – касательное и нормальное напряжение на площадке скольжения; h – высота отсека.

Как видим, функционал Ю. И. Соловьева представляет собой сумму горизонтальных векторов сил, проекции которых на площадки скольжения отсеков равны алгебраической сумме проекций внешних сил на ту же площадку. Такой результат является следствием неучета работы межблоковых реакций; выясним, в каком случае это оправданно. Потребуем в выражении (8) выполнения условий $\int T'y'dx = 0, \int fE'y'dx = 0,$ тогда, согласно лемме Дю-Буа–Реймонда [8], при отсутствии внешних касательных и нормальных составляющих реакций будем иметь $y' = \text{const}$.

Таким образом, для того чтобы межблоковые реакции на возможном перемещении всей призмы не совершали работу, т. е. их можно было бы не учитывать при расчете (идеальные межблоковые связи, $\sum \delta A_k^r = 0$), необходимо выполнение двух условий: 1) $T_0 = E_0 = T_1 = E_1 = 0$; 2) $y' = \text{const}$ (поверхность скольжения – плоскость). С другой стороны, при выполнении только второго условия межблоковые реакции работу совершать также не будут. Они выйдут из-под знака интеграла и будут считаться внешними, действующими на призму смещения (или ее часть) по вертикальным граням крайних отсеков.

Зададимся вопросом: как должны распределяться между собой касательная и нормальная составляющие межблоковой реакции, чтобы при перемещении отсека они совершали экстремальную работу? Таким образом, имеем задачу линейного программирования

$$E'\left(1+f\text{tg }\vartheta_i\right)dx+T'\left(\text{tg }\vartheta_i-f\right)dx\to \text{extr.}$$

Градиент функции в этом случае имеет координаты $\overrightarrow{\text{grad}}=\left\{1+f\text{tg}\vartheta_i,\text{tg}\vartheta_i-f\right\}$, поэтому экстремальную работу на перемещении реакция будет производить при следующем условии (рис. 2):

$$\frac{\partial T}{\partial E}=\frac{T'}{E'}=\frac{\text{tg }\vartheta_i-f}{1+f\text{tg }\vartheta_i}=\text{tg}\left(\vartheta_i-\varphi\right). \qquad (9)$$

Докажем справедливость равенства (9). Доказательство можно дать на основе принципа наименьшего принуждения, открытого К. Ф. Гауссом в 1829 г. [9]. Принципу К. Ф. Гаусса, в частности, можно дать энергетическое толкование, которое И. И. Рахманинов назвал началом наименьшей потерянной работы [9]: действительное движение среди кинематически возможных выделяется тем, что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый данный момент есть минимум. Если мы мысленно уберем реакцию смежного отсека, т. е. заменим несвободное движение свободным, то направление движения отсека не изменится. Поэтому угол наклона вектора отклонения несвободного движения от свободного совпадает с углом наклона площадки скольжения. Работа реакции в этом случае определится зависимостью:

$$A_R=R\left[f\sin\left(\xi-\vartheta_i\right)-\cos\left(\xi-\vartheta_i\right)\right]\Delta S_i,$$

где R – реакция смежного отсека; ξ – угол наклона реакции к горизонту; ΔS_i – перемещение отсека по площадке сдвига.

Учитывая, что величины R и произвольны и постоянны, для выполнения условия экстремума работы приравняем ее производную по ξ к нулю. Откуда

$$\xi=\vartheta_i-\varphi.$$

Из принципа К. Ф. Гаусса также следует, что для действительного движения системы реакции связей минимальны (М. В. Остроградский, 1836) [9]. Равновесие является одним из истинных состояний системы. Поэтому, формализуя задачу, необходимо найти такой угол ξ, чтобы удержать в равновесии отсек минимальной по величине силой R. Решение поставленной задачи приводит к тем же результатам.

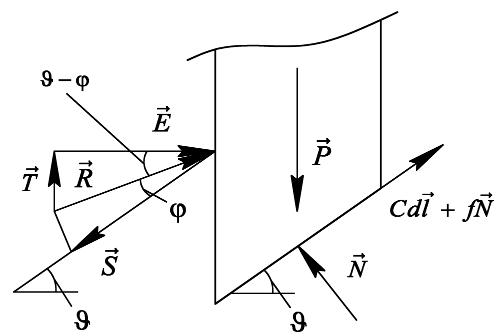

Рис. 2. Направление межблоковой реакции

Согласно уравнению (9), направление реакции не зависит от формы отсека, а зависит от угла наклона его основания. Таким образом, при разбиении призмы смещения на отсеки плоскостями, наклоненными к оси x под углами $\vartheta_i+90^\circ-\varphi$, на них будут действовать только нормальные реакции. Данные площадки соответствуют площадкам линий второго семейства поверхностей скольжения в методе предельного напряженного состояния, однако в последнем случае они являются предельно напряженными.

Решаем совместно уравнения (6) и (9) относительно производных функций межблоковых реакций:

$$T'=-\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)^2-C\left(1+y'^2\right)\left(y'-f\right)}{\left(1+f^2\right)\left(1+y'^2\right)}. \qquad (10)$$

$$E'=-\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)\left(1+fy'\right)-C\left(1+y'^2\right)\left(1+fy'\right)}{\left(1+f^2\right)\left(1+y'^2\right)}. \qquad (11)$$

Подставляем полученные соотношения (10) и (11) в уравнение (8), и после преобразований необходимое и достаточное условие равновесия призмы смещения представляется в виде:

$$\int\left[\frac{\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C(1+y'^2)}{1+fy'}\right]dx+$$
$$+(E_1-E_0)=0. \qquad (12)$$

Отметим, что касательная составляющая межблоковой реакции не может превышать величины кулоновского сопротивления сдвигу. Функционал, реализующий предельное равновесие по боковым поверхностям отсеков, исследован автором в диссертации [1].

Выясним физический смысл функционала (12):

$$\sum\left(\gamma h\sin\vartheta_i\cos\vartheta_i-f\gamma h\cos^2\vartheta_i-C\right)dl\cos\vartheta_i=$$
$$=\sum\left(\tau-f\sigma_n-C\right)dl\cos\vartheta_i.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием равновесия призмы смещения или ее части является нуль-вектор алгебраической суммы проекций внешних сил, действующих по площадке скольжения каждого отсека на горизонтальную ось.

Пусть имеется ненагруженный откос несвязных пород. Кроме того, предположим, что поверхность скольжения пересекает линию откоса, т. е. на концах интервала выполняется условие $\hat{y}-y=0$. В этом случае, согласно лемме Лагранжа [8], из уравнения (12) будем иметь $y'=f$ во всех точках. То есть поверхность скольжения представляет собой плоскость, наклоненную к горизонту под углом φ..

Анализируя уравнение (6), замечаем, что при условии $0\le\vartheta_i\le\varphi$ работа касательной составляющей межблоковой реакции становится положительной, что, согласно теореме Манабреа [10], невозможно. Поэтому на этом участке реакция горизонтальна (рис. 3). В этом случае производная межблоковой реакции определится формулой:

$$E'=-\frac{\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C(1+y'^2)}{(1+fy')},$$

а условие равновесия призмы (или ее части) примет вид:

$$\int\left[\frac{\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C(1+y'^2)}{1+fy'}\right]dx+$$
$$+(E_1-E_0)=0. \qquad (13)$$

Функционал (13) достаточно подробно исследован автором в работе [1].

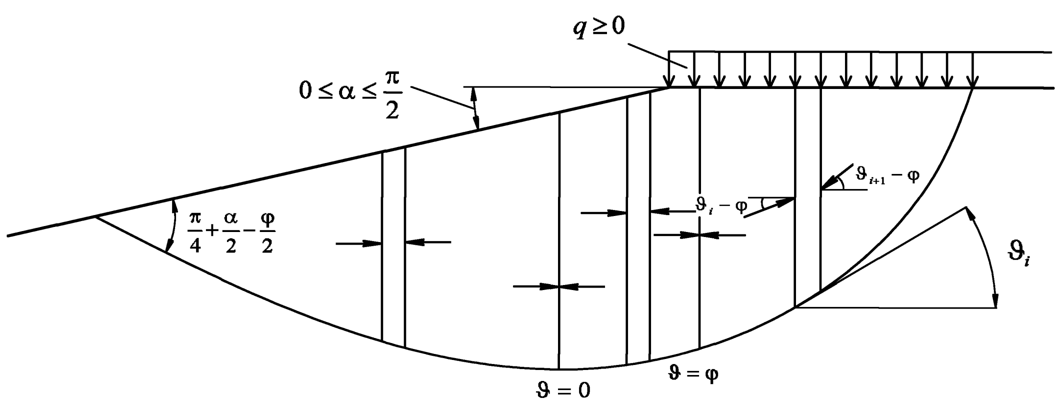

Рис. 3. Распределение реакций на различных участках поверхности скольжения

На участке $(\vartheta_i\le 0)$ касательная составляющая межблоковой реакции также отсутствует ввиду увеличения угла наклона поверхности скольжения по мере приближения к откосу. Таким образом, на пассивном участке $(\vartheta_i\le\varphi)$ межблоковая реакция всюду горизонтальна (рис. 3). Как показано в работе [1], угол выхода поверхности скольжения в откос (угол между откосом и поверхностью скольжения в точке их пересечения) для функционала (13) определяется формулой $\varepsilon=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\varphi}{2}$, а для сыпучих пород поверхность скольжения совпадает с откосом (рис. 3). Приняв при расчете оснований сооружений $\alpha = 0$, получим $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, что совпадает с известным результатом статики сыпучих сред.

Таким образом, условие равновесия для всей призмы смещения свободного откоса имеет вид:

$$\int\limits_{\vartheta\le\varphi}\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y_1\right)\left(y_1'-f\right)-C\left(1+y_1'^2\right)}{1+fy_1'}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y_2\right)\left(y_2'-f\right)-C\left(1+y_2'^2\right)}{1+y_2'^2}\right]dx=0. \quad (14)$$

Перейдем к рассмотрению решения задачи по нахождению потенциальной поверхности скольжения в однородных откосах общего вида (плоских) и определению их предельных параметров. Заметим, что поверхность скольжения в этом случае будет проходить как под откосом, так и под горизонтальной площадкой (бермой).

Условие равновесия призмы смещения (14) получено из предположения равновесия каждого отсека, т. е. выполнения предельного равновесия в каждой точке поверхности скольжения. Условия равновесия (5), (6) будут выполняться при произвольной высоте отсека, однако вес должен быть необходимым и достаточным для выполнения условия предельного равновесия при заданной форме откоса и физико-механических характеристиках горных пород. Предположим, найдется такой параметр $n > 0$, одинаковый для всех отсеков, что если разделить на него величину сцепления (или умножив объемный вес), то условие предельного равновесия будет выполняться в каждой точке поверхности скольжения. Поместим начало системы координат в точку пересечения поверхности скольжения с откосом, получим следующую задачу вариационного исчисления для нахождения наиболее опасной поверхности скольжения свободного откоса:

$$\int\limits_{\vartheta\le\varphi}\left[\frac{\left(kx-y_1\right)\left(y_1'-f\right)-\lambda\left(1+y_1'^2\right)}{1+fy_1'}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\left(kx-y_2\right)\left(y_2'-f\right)-\lambda\left(1+y_2'^2\right)}{1+y_2'^2}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\left(H-y_3\right)\left(y_3'-f\right)-\lambda\left(1+y_3'^2\right)}{1+y_3'^2}\right]dx\to \text{extr.} \quad (15)$$

где   – тангенс угла наклона откоса; H – высота откоса; λ – заведомо неизвестный параметр, определяющий предельную высоту плоского откоса, $\lambda = C/\gamma n$.

Ввиду важнейшего свойства вариации функционалов (вариация суммы равна сумме вариаций), для решения поставленной задачи необходимо определить функции, доставляющие экстремум каждому из функционалов в отдельности. Рассмотрим первый функционал (15). Уравнение Л. Эйлера [8] для данного функционала представляет собой нелинейное относительно производных дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому для упрощения его решения необходимо произвести замену переменных в функционале, тем самым понизив порядок уравнения, и возвратиться к прежним переменным. Например, можно принять

$$\begin{cases} kx - y_1 = y; \\ x = x. \end{cases}.$$

Граничным условием для определения произвольной постоянной в уравнении Л. Эйлера является условие трансверсальности [8], в принятой системе координат оно имеет вид

$$y_1'\left(x=0\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\varphi}{2}\right).$$

Вторым условием для принятой системы координат является $y_1\left(0\right) = 0$.

Если воспользоваться условием трансверсальности, уравнение, определяющее опасную поверхность скольжения, в принятой системе координат будет иметь вид

$$kx - y_1 = \lambda\frac{\left(kf-1\right)y_1'^2 + 2\left(k+f\right)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2y_1' + k - f + kf^2}. \quad (16)$$

Аналогичным образом для второго функционала (15) имеем дифференциальное уравнение

$$kx - y_2 = \left(\lambda + C_1\right)\frac{\left(1+y_2'^2\right)^2}{2y_2'^3 - \left(k+3f\right)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}. \quad (17)$$

Произвольную постоянную C_1 определим из условия

$$kx - y_1\Big|_{y_1' = \text{tg}\,\varphi} = kx - y_2\Big|_{y_2' = \text{tg}\,\varphi}.$$

Таким образом, окончательно будем иметь уравнение:

$$kx - y_2 = \lambda\frac{1+kf}{1+f^2}\cdot\frac{\left(1+y_2'^2\right)^2}{2y_2'^3 - \left(k+3f\right)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}. \quad (18)$$

Перейдем к определению условия для поверхности скольжения в точке стыка участков откоса и горизонтальной площадки, т. е. условия на прямой $x = H\text{ctg}\,\alpha.$ Рассматриваются два последних интеграла (15), что приводит к разрывной задаче второго рода [11]. Условие в точке стыка представляет собой равенство условий трансверсальности по обе стороны от прямой $x = H\text{ctg}\,\alpha.$ Таким образом, имеем уравнение:

$$F_{2y_2'}\Big|_{x=H\text{ctg}\,\alpha-0} = F_{3y_3'}\Big|_{x=H\text{ctg}\,\alpha+0}. \quad (19)$$

где $F_{y'}$ – частная производная подынтегрального выражения по производной функции.

Взяв производные от подынтегральных выражений, приравняв их, а также учтя, что ординаты концов экстремалей в точке стыка равны, получим выражение:

$$y_2' = y_3'.$$

Таким образом, производные в точке стыка равны, это говорит о том, что поверхность скольжения не преломляется при переходе, например, с участка откоса уступа на участок площадки. Можно показать, что это утверждение справедливо для произвольной формы границы между смежными отсеками.

Приняв в правой части уравнения (17) $k = 0,$ получим уравнение, определяющее форму опасной поверхности скольжения для третьего функционала (15):

$$H - y_3 = \left(\lambda + C_1\right)\frac{\left(1+y_3'^2\right)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f}. \quad (20)$$

Для определения произвольной постоянной в этом уравнении приравняем к нулю подынтегральное выражение третьего функционала (15), что является требованием выполнения условия предельного равновесия для крайнего отсека:

$$F_3 = \frac{\gamma\left(H - y_3\right)\left(y_3' - f\right) - C\left(1 + y_3'^2\right)}{1 + y_3'^2} = 0.$$

В данном уравнении неизвестно значение производной функции поверхности скольжения в ее верхней точке. Для того чтобы межблоковая реакция на перемещении совершала работу, необходимо, чтобы вышерасположенный (вдоль поверхности скольжения) отсек имел большую энергию (потенциал), чем нижерасположенный. Для выполнения этого требования необходимо:

$$\frac{dF_3}{dx} > 0,$$

где F_3 – подынтегральное выражение третьего функционала (15).

Считая высоты смежных отсеков равными, получаем следующее неравенство:

$$\frac{dF_3}{dx} = y''\left(1 + 2fy' - y'^2\right) > 0. \quad (21)$$

где y'' – вторая производная функции поверхности скольжения по x.

Учитывая, что функция поверхности скольжения вогнутая, определяем максимально возможное значение производной функции поверхности скольжения. Подставляя вместо производной максимально возможное значение наклона поверхности скольжения, получим следующее граничное условие:

$$y_3'\left(x_0\right) = f + \sqrt{1+f^2} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$H - y_3 = H_{90} = \frac{2C}{\gamma}\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

Определяем в уравнении (20) произвольную постоянную, и окончательно уравнение будет иметь вид:

$$H - y_3 = \frac{C}{\gamma}\cdot\frac{\left(1+y_3'^2\right)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f}, \quad (22)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения, определяющие наиболее опасную поверхность скольжения, на различных участках плоского однородного откоса с учетом (16), (18), (22) имеют вид:

$$kx - y_1 = \lambda \frac{\left(kf-1\right) y_1'^2 + 2\left(k+f\right) y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2 y_1' + k - f + kf^2},$$

$$-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\varphi}{2}\right) \le y_1' \le \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$kx - y_2 = \lambda \frac{1+kf}{1+f^2} \cdot \frac{\left(1+y_2'^2\right)^2}{2y_2'^3 - \left(k+3f\right) y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f},$$

$$y_2' > \mathrm{tg}\,\varphi, \text{откос}$$

$$H - y_3 = \frac{C}{\gamma} \cdot \frac{\left(1+y_3'^2\right)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f},$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi < y_3' \le \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \text{берма} \qquad (23)$$

Для определения производной функции поверхности скольжения в точке стыка откоса и бермы необходимо приравнять правые части выражений (18) и (22) и решить полученное уравнение относительно производной. Пусть значение производной в точке стыка участков равно b, тогда несложно увидеть, что

$$b = b\left(\alpha, \varphi, \frac{C}{\lambda\gamma}\right).$$

Представим уравнения, определяющие поверхность скольжения на различных участках в символичном виде:

$$kx - y = \mu\eta\left(p\right),$$

где $p \equiv y'$ – параметр.

Тогда $d\left(kx - y\right) = \mu\eta'\left(p\right)dp.$ Дифференцируя левую часть уравнения и принимая во внимание, что $dy = pdx$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} dx = \mu \dfrac{\eta'\left(p\right)}{k-p} dp; \\ dy = \mu \dfrac{\eta'\left(p\right)}{k-p} pdp. \end{cases} \qquad (24)$$

Используя уравнения (14), (23), (24), а также учтя, что

$$H = k\left(\int_0^{x_0} dx_1 + \int_{x_0}^{H/k} dx_2\right),$$

получим систему двух уравнений, определяющую предельные параметры плоских однородных откосов:

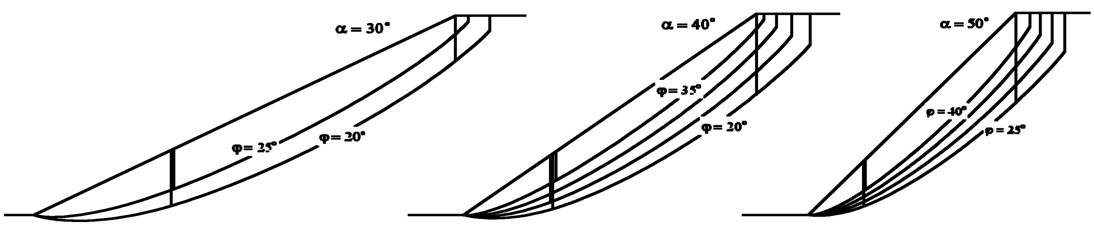

Рис. 4. Поверхности скольжения в плоских однородных откосах

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\mathrm{tg}\,\varphi} \left[\frac{\left(p-f\right)}{1+fp}\eta_1\left(p\right) - \frac{C}{\lambda\gamma}\cdot\frac{1+p^2}{1+fp}\right]\frac{\eta_1'\left(p\right)}{k-p}dp + \\ \displaystyle+\int_{\mathrm{tg}\,\varphi}^{b}\left[\frac{p-f}{1+p^2}\eta_2\left(p\right) - \frac{C}{\lambda\gamma}\right]\frac{\eta_2'\left(p\right)}{k-p}dp + \\ \displaystyle+\left(\frac{C}{\lambda\gamma}\right)^2 \int_b^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\left[\frac{p-f}{1+p^2}\eta_3\left(p\right) - 1\right]\frac{\eta_3'\left(p\right)}{-p}dp = 0; \\ \displaystyle\int_{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\mathrm{tg}\,\varphi}\frac{\eta_1'\left(p\right)}{k-p}dp + \int_{\mathrm{tg}\,\varphi}^{b}\frac{\eta_2'\left(p\right)}{k-p}dp = \frac{H}{\lambda k}. \end{cases} \qquad (25)$$

Ширина призмы обрушения определится зависимостью

$$a = \frac{C}{\gamma}\int_b^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\frac{\eta_3'\left(p\right)}{-p}dp.$$

Для построения поверхности скольжения необходимо произвести интегрирование уравнений (24) при различных значениях верхнего предела. В результате будем последовательно получать координаты точек поверхности скольжения.

По результатам численного интегрирования были построены поверхности скольжения для некоторых значений углов откоса и внутреннего трения в предельном равновесии (рис. 4). Вертикальными линиями на рисунках отсечены точки поверхностей скольжения с углом наклона, равным углу внутреннего трения горных пород, а также границы участков откоса и горизонтальной площадки (бермы). Для построения поверхностей скольжения был принят пятиградусный интервал углов внутреннего трения.

Как показали результаты численного решения задачи, параметр λ для плоских однородных откосов зависит от углов откоса, внутреннего трения и соотношения C/γ, стремится к нулю при $\alpha \to 90^\circ$ и равен $2C/\gamma$ в случае $\alpha \to \varphi$.

В результате численного решения уравнений (25) определены предельные параметры плоских однородных откосов, а также вычислены отношения ширины призмы обрушения к высоте откоса a/H в предельном состоянии. Данные сведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения отношений C H (сверху), a/H (по центру) и $C/\gamma\lambda$ (снизу) для предельно устойчивых плоских однородных

		Угол внутреннего трения φ, град					
		15	20	25	30	35	40
Угол устойчивого откоса α, град	20	0,0154 0,121 0,512	0 0 $2C/\gamma$				
	25	0,0326 0,207 0,512	0,0116 0,075 0,521	0 0 $2C/\gamma$			
	30	0,0484 0,259 0,513	0,0260 0,141 0,527	0,0093 0,052 0,529	0 0 $2C/\gamma$		
	35	0,063 0,290 0,513	0,040 0,187 0,533	0,022 0,104 0,542	0,0078 0,039 0,536	0 0 $2C/\gamma$	
	40	0,0771 0,309 0,515	0,0539 0,219 0,541	0,0346 0,144 0,554	0,0188 0,082 0,556	0,0068 0,031 0,544	0 0 $2C/\gamma$
	45	0,091 0,320 0,518	0,067 0,242 0,548	0,048 0,175 0,568	0,031 0,117 0,576	0,0169 0,067 0,572	0,0061 0,026 0,553
	50	0,105 0,325 0,523	0,081 0,257 0,559	0,0609 0,198 0,584	0,0432 0,146 0,599	0,0281 0,099 0,600	0,0155 0,058 0,589
	55	0,120 0,327 0,529	0,096 0,268 0,571	0,075 0,216 0,603	0,056 0,168 0,625	0,040 0,125 0,633	0,026 0,086 0,628
	60	0,135 0,324 0,538	0,111 0,273 0,589	0,089 0,228 0,629	0,070 0,186 0,658	0,053 0,147 0,674	0,038 0,111 0,676
	65	0,152 0,317 0,552	0,128 0,273 0,614	0,106 0,233 0,667	0,086 0,197 0,704	0,068 0,163 0,728	0,052 0,131 0,737
	70	0,1719 0,304 0,574	0,147 0,269 0,649	0,124 0,235 0,714	0,1035 0,203 0,769	0,084 0,175 0,803	0,067 0,146 0,824
	75	0,195 0,286 0,610	0,1687 0,258 0,704	0,1456 0,229 0,794	0,124 0,204 0,862	0,104 0,179 0,917	0,086 0,155 0,954
	80	0,2242 0,2548 0,684	0,198 0,232 0,820	0,173 0,211 0,943	0,150 0,192 1,05	0,128 0,174 1,12	0,109 0,155 1,18

85	0,266 0,202 0,880	0,2378 0,186 1,11	0,211 0,173 1,32	0,186 0,161 1,49	0,163 0,148 1,64	0,141 0,136 1,75
87,5	0,298 0,153 1,211	0,2678 0,145 1,553	0,240 0,137 1,87	0,214 0,127 2,17	0,189 0,118 2,44	0,166 0,109 2,65
89,9	0,3655 0,035 6,45	0,333 0,034 8,62	0,302 0,032 10,89	0,273 0,030 12,8	0,245 0,029 14,6	0,219 0,027 16,1
90	0,3837 0 ∞	0,3501 0 ∞	0,3185 0 ∞	0,2887 0 ∞	0,2603 0 ∞	0,2332 0 ∞

По данным табл. 1 построена номограмма устойчивости плоских однородных откосов (рис. 5).

Часто в практике открытых горных работ встает задача по определению ширины призмы обрушения, по данным табл. 1 построена номограмма для определения ее величины (рис. 6).

Перейдем к рассмотрению условий устойчивости анизотропных откосов. Под анизотропией в общем случае будем понимать систему поверхностей ослабления с характеристиками паспорта прочности C' и $f' = \mathrm{tg}\,\varphi'$, как правило, меньшими показателей прочности массива C и φ. Рассмотрим

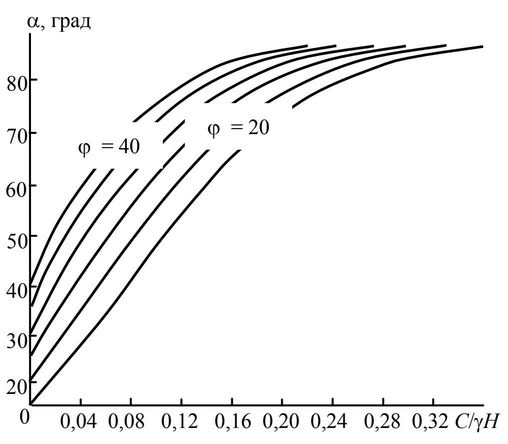

Рис. 5. Номограмма устойчивости однородных плоских откосов

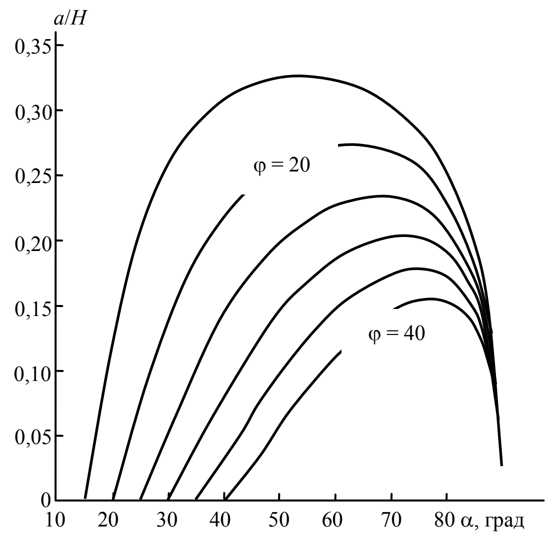

Рис. 6. Номограмма для определения ширины призмы обрушения

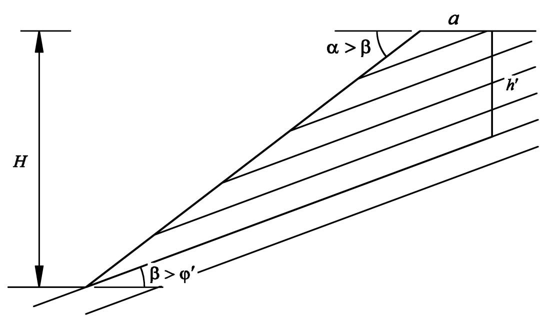

Рис. 7. Схема к расчету предельных параметров анизотропного откоса

вначале произвольный плоский откос, разрушение которого произойдет по поверхности скольжения, полностью совпадающей с плоской поверхностью ослабления (рис. 7).

Очевидно, из постановки задачи имеем условие $\alpha > \beta$. Если $\beta < \varphi'$, то разрушение откоса произойти не может, поэтому будем исходить из неравенства $\beta > \varphi'$. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку выхода поверхности ослабления в откос, тогда условие равновесия призмы смещения примет вид:

$$\int_{0}^{H\operatorname{ctg}\alpha}\left[\frac{\gamma\left(\operatorname{tg}\alpha x-\operatorname{tg}\beta x\right)\left(\operatorname{tg}\beta-f'\right)}{1+\operatorname{tg}^2\beta}-C'\right]dx+$$

$$+\int_{H\operatorname{ctg}\alpha}^{H\operatorname{ctg}\alpha+a}\left[\frac{\gamma\left(H-\operatorname{tg}\beta x\right)\left(\operatorname{tg}\beta-f'\right)}{1+\operatorname{tg}^2\beta}-C'\right]dx=0. \quad (26)$$

Из геометрических построений ширина призмы обрушения a выражается формулой

$$a=\frac{H\left(1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha\right)-h'}{\operatorname{tg}\beta}, \quad (27)$$

где h' – высота трещины отрыва в анизотропных откосах.

Значение высоты трещины отрыва, очевидно, определяется из выражения

$$\frac{\gamma h'\left(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\varphi'\right)}{1+\operatorname{tg}^2\beta}-C'=0,$$

откуда

$$h'=\frac{C'}{\gamma}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\varphi'}=\frac{C'}{\gamma}\frac{\cos\varphi'}{\cos\beta\sin\left(\beta-\varphi'\right)}. \quad (28)$$

Решая уравнение (26) совместно с (27) и (28), предельную высоту откоса выразим зависимостью:

$$H=h'\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{h'}{1-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}. \quad (29)$$

Формула (29) рекомендуется Правилами обеспечения устойчивости откосов [12] и получена из условий геометрической статики. Однако, как показано ранее, она является следствием более общего уравнения равновесия. Заметим, что в случае, когда $\beta>\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}$, в качестве условия равновесия необходимо использовать функционал Ю. И. Соловьева [6], так как в этом случае межблоковые реакции не проявляются в силу неравенства (21). Однако для случая, рассмотренного выше, приходим к тем же результатам, т. е. к уравнению (29).

Рассмотрим теперь более общий случай потери устойчивости анизотропного откоса и методику определения предельных параметров такого откоса (рис. 8). В этом случае поверхность скольжения может частично совпадать с поверхностями анизотропии и проходить вкрест нее, подобно поверхности в однородном откосе. В этом случае условие равновесия, а также угол излома θ существенно зависят от координат точек излома, угла падения поверхностей ослабления, а также от физико-механических свойств пород вдоль плоскостей анизотропии и вкрест нее.

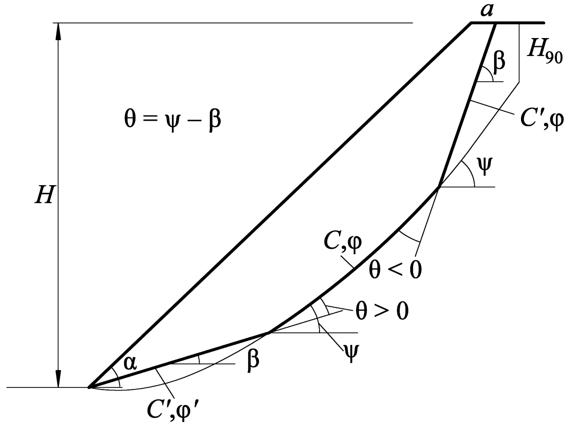

Рис. 8. Поверхность скольжения в анизотропном откосе

Ограничимся рассмотрением следующей расчетной схемы. Пусть в массиве имеются плоские поверхности ослабления, падающие в сторону выработанного пространства под углом $\beta>\varphi'$ к оси x. В этом случае поверхность скольжения может частично совпадать с поверхностями ослабления. Необходимо определить условие в точке пересечения этих поверхностей с криволинейной частью поверхности скольжения, построенной для изотропной части массива на участке $\vartheta>\varphi$. Формализация поставленной задачи с использованием уравнения (14) приводит к разрывной вариационной задаче второго рода

$$\int_{x_1}^{x_0}\frac{\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-\lambda\left(1+y'^2\right)}{1+y'^2}dx+$$

$$F_1+\left(\Phi'-y_1'\right)F_{1y_1'}=F_2+\left(\Phi'-y_2'\right)F_{2y_2'}, \quad (30)$$

где g – постоянная; $\lambda'=\frac{C'}{\gamma n}=\frac{C'}{C}\lambda$ – параметр.

Условие в точке излома поверхности скольжения имеет вид [11]:

$$+\int_{x_0}^{x_2}\frac{\left(\hat{y}-\operatorname{tg}\beta x-g\right)\left(\operatorname{tg}\beta-f'\right)-\lambda'\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)}{1+\operatorname{tg}^2\beta}dx\to\text{extr}, \quad (31)$$

где F_1, F_2 – подынтегральные выражения слагаемых (30); $F_{1y_1'}$, $F_{2y_2'}$ – частные производные подынтегральных выражений по производной функции поверхности скольжения; Φ' – производная функции, по которой перемещается точка разрыва (поверхность ослабления или граница литологических слоев).

Условие (31) запишется в виде:

$$\frac{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\psi}-\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\varphi'}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+$$

$$+\left(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\psi\right)\frac{1+2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}^2\psi}{\left(1+\operatorname{tg}^2\psi\right)^2}=\frac{\lambda-\lambda'}{h}, \quad (32)$$

где ψ – угол наклона поверхности скольжения к оси x (к горизонту) в точке преломления; h – глубина точки излома (расстояние по вертикали от поверхности откоса до точки излома).

Уравнение (32) определяет условие в точке стыка криволинейной части поверхности скольжения с поверхностью ослабления и содержит две неизвестных: h и ψ. В зависимости от координат точки излома и угла наклона поверхности скольжения в уравнение (32) вместо h необходимо подставить правую часть одного из уравнений (17), (20), заменив предварительно производную функции величиной $\operatorname{tg}\psi$. Абсциссу точки излома определим из условия равенства ординат (глубин) экстремалей слева и справа. Таким образом, угол наклона поверхности скольжения в точке преломления ψ и абсцисса точки излома будут зависеть от параметра λ. Для определения λ, а также предельной высоты анизотропного откоса H необходимо составить систему уравнений, подобную (25). Первое уравнение требует выполнения условия предельного равновесия вдоль поверхности скольжения, а второе осуществляет геометрическую связь между предельной высотой анизотропного откоса и параметром λ. Абсолютная величина разности углов ψ и β определит угол излома поверхности скольжения θ.

Рассмотрим задачу о преломлении поверхности скольжения вследствие ее перехода в литологический слой с иными механическими характеристиками. Аналогом поставленной задачи является задача о преломлении луча света на границе сред с разными оптическими плотностями в постановке принципа Ферма, 1660 г. [11]. Примем ψ – угол наклона поверхности скольжения к оси x до преломления (слой с параметром λ); β – угол наклона контакта литологических слоев к оси x; ω – угол наклона поверхности скольжения к оси x после преломления (слой с параметром λ'); C', φ' – механические характеристики литологического слоя, в который переходит поверхность скольжения. Составляя выражение подобное (30), и используя условие (31), получим уравнение:

$$\frac{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\psi}-\frac{\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\varphi'}{1+\operatorname{tg}^2\omega}+$$

$$+\left(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\psi\right)\frac{1+2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}^2\psi}{\left(1+\operatorname{tg}^2\psi\right)^2}-$$

$$-\left(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\omega\right)\frac{1+2\operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}^2\omega}{\left(1+\operatorname{tg}^2\omega\right)^2}=\frac{\lambda-\lambda'}{h}. \quad (33)$$

Анализируя условие (31), замечаем, что в случае $C=C'$, $\varphi=\varphi'$ преломления поверхности скольжения не происходит, т. е. $\psi=\omega$. Кроме того, очевидно, что поверхность скольжения не может после преломления вернуться в первоначальный литологический слой, т. е. предельным значением угла ω является угол β. В этом случае скольжение произойдет по поверхности, параллельной или совпадающей с контактом (зависит от прочностных характеристик контакта). Приняв в уравнении (33) $\omega=\beta$, получим условие (32).

В качестве примера на рис. 9 приведены результаты определения предельных высот и построения потенциальных поверхностей скольжения для неоднородного и анизотропного откосов с использованием условий (32), (33).

Таким образом, расчет слоистого (неоднородного) откоса подобен расчету анизотропного откоса. В зависимости от количества слоев, пересекаемых поверхностью скольжения, будут добавляться неизвестные параметры, подобные λ и зависимые от него. Количество этих параметров определяется количеством литологических слоев, а их смыслом является определение размеров призмы смещения (высоты откоса), необходимых для выполнения условия предельного равновесия. Для определения этих параметров, а также абсцисс точек излома на каждой границе литологического слоя необходимо, чтобы ординаты концов экстремалей в точке стыка (излома) были равны ординате функции раздела литологических слоев. В конечном итоге

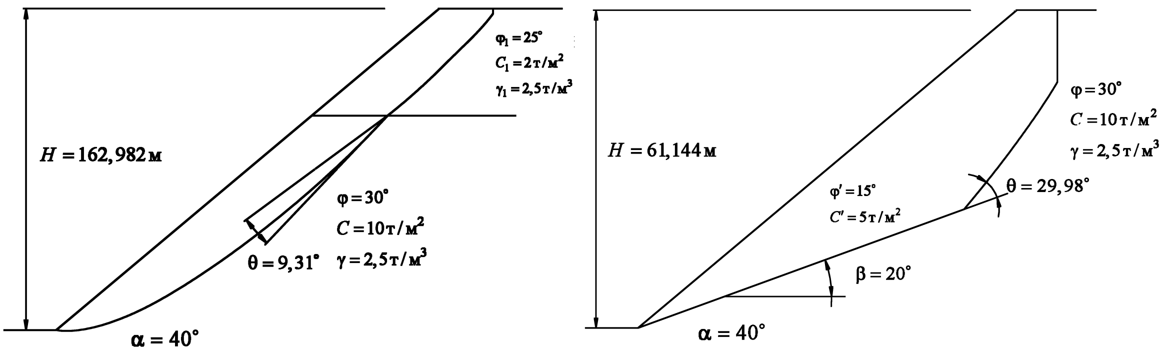

Рис. 9. Примеры расчета неоднородного и анизотропного откосов

углы поверхности скольжения по обе стороны от границ литологических слоев ψ, ω глубины точек излома, абсциссы точек излома и параметры $\lambda', \lambda''...$ выразятся в функции от физико-механических свойств литологических слоев, угла наклона откоса, его высоты (в зависимости от условий привязки слоев к высоте откоса) и параметра λ, последние из которых находятся из уравнения предельного равновесия вдоль всей поверхности скольжения и геометрической связи параметра λ и высоты откоса. Данные условия составляются подобно уравнениям (25).

В заключение отметим, что уравнениями (32), (33) не исчерпываются все условия в точках излома, которые могут иметь место при решении задач для неоднородных и анизотропных откосов. Подобные условия находятся аналогично с использованием уравнения (31) и выбором соответствующих функционалов, описывающих условия равновесия для конкретных углов наклона поверхностей скольжения и ослабления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жабко А. В. Исследование закономерностей, определяющих геометрию поверхности скольжения в откосах и расчетные характеристики, в изотропных горных массивах: дис. … канд. техн. наук. Екатеринбург: УГГУ, 2009. 152 с.

2. Жабко А. В. Теория расчета устойчивости оснований и откосов // Изв. УГГУ. 2011. Вып. 25–26. С. 59–65.

3. Жабко А. В. Расчет устойчивости откосов // Маркшейдерия и недропользование. 2012. № 2. С. 55–59.

4. Жабко А. В. Предельные параметры плоских однородных откосов // Изв. вузов. Горный журнал. 2012. № 6. С. 22–25.

5. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. 12-е изд., стереотип. М.: Высш. школа, 2002. 416 с.

6. Соловьев Ю. И. Устойчивость откосов из гипотетического грунта // Вопросы инженерной геологии, оснований и фундаментов. М., 1962. С. 83–97.

7. Дорфман А. Г. Вариационный метод исследования устойчивости откосов // Вопросы геотехники. Днепропетровск, 1965. С. 17–25.

8. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. 2-е изд. М.: Гос. изд-во. техн.-теор. лит., 1950. 296 с.

9. Маркеев А. П. О принципе наименьшего принуждения // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 113–121.

10. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. Киев: Гостехиздат, 1963. 791 с.

11. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973. 192 с.

12. Правила обеспечения устойчивости откосов на угольных разрезах. СПб., 1998. 208 с. (Минтопэнерго РФ. РАН. Гос. НИИ горн. геомех. и маркшейд. дела – Межотраслевой науч. центр ВНИМИ).

Поступила в редакцию 11 мая 2013 г.

Жабко Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, Куйбышева 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: zhabkoav@mail.ru