УДК 519.86

МАТРИЧНО-ОПЕРАТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. Б. Сурнев

Показано, что основная задача математического моделирования динамики параметрической производственно-сбытовой системы с сосредоточенными параметрами – задача Коши для системы ОДУ с зависящими от времени коэффициентами – при некоторых предположениях приводится к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. С использованием аналитического вида решения системы интегральных уравнений Вольтерра в виде ряда последовательных подстановок построена операторно-матричная модель параметрической производственно-сбытовой системы с непрерывным временем, находящейся под воздействием внешних (экзогенных) возмущений. В рамках описанного формализма введено понятие оператора рождения нового продукта. Приведены утверждения, из которых следует адекватность формализма интегральных эволюционных уравнений Вольтерра моделируемой предметной ситуации.

Ключевые слова: *параметрическая система; оператор рождения; интегральные уравнения Вольтерра; операторно-матричная модель; математическое моделирование.*

Два представления линейной динамической системы с сосредоточенными параметрами. Известно [1], что сложная линейная динамическая (нестационарная) система с сосредоточенными параметрами может быть представлена в операторном виде:

$$\left|y(t)\right\rangle = S(t)\left|f(t)\right\rangle, \qquad (1)$$

где S – явно заданный матричный оператор системы, описывающий преобразование вектора-столбца входного сигнала $\left|f(t)\right\rangle$ в вектор-столбец выходного сигнала $\left|y(t)\right\rangle$, а $t \subset [a,b]$ – актуальное время эволюции системы. В развернутой форме соотношение (1) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^1(t) & S_2^1(t) & \dots & S_m^1(t) \\ S_1^2(t) & S_2^2(t) & \dots & S_m^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^n(t) & S_2^n(t) & \dots & S_m^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^m(t) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Здесь элементы $S_j^i(t)$ матричного оператора системы $S(t)$ сами являются операторами, которые можно назвать операторами **рождения** по той причине, что действие каждого из них на соответствующую компоненту вектора входного сигнала приводит к «рождению» части соответствующей компоненты вектора выходного сигнала. Далее будет показано, что операторы рождения являются интегральными операторами, в рассматриваемом случае системы с сосредоточенными параметрами и непрерывным временем относятся к типу интегральных операторов Вольтерра и выражаются в виде вполне определенных интегрально-степенных рядов.

На основе аналогии с теорией рассеяния [2, 3] явно заданный матричный оператор системы S в соотношениях (2) называют ***матрицей рассеяния***, или просто ***S-матрицей***, пары векторов входного и выходного сигнала – ***каналами рассеяния***, саму сложную систему – ***многоканальной***, а ее математическую модель – ***многомерной***. Учитывая представление (2), будем дальше для оператора системы использовать матричное обозначение S и говорить о нем, как о S-матрице. Таким образом, подразумевается, что все уравнения рассматриваются в некотором конкретном ***функциональном представлении***. Отметим, что размерности компонент векторов входного и выходного сигнала могут быть разными. Очевидно, что для *S*-матрицы системы можно найти только модельный вид и, следовательно, при таком способе описания эволюции системы *S*-матрица и является математической моделью последней. Дальше разделять понятие системы и ее математической модели не будем, основываясь на принципе «эквивалентности», который сформулирован в работе [4] следующим образом: «Поскольку мы можем толковать о физической реальности, только опираясь на ту или иную модель, самое простое – вообще забыть о различии между объектом и построенной нами моделью этого объекта».

Строение *S*-матрицы системы может быть достаточно сложным: *S*-матрица может иметь нулевые элементы, а ее ненулевые элементы – операторы рождения – могут иметь блочную структуру и т. д. Отметим еще одну особенность рассматриваемых систем. В записи *S*-матрицы в соотношении (2) операторы рождения явно зависят от времени. Такая зависимость имеет место, когда структурные параметры системы и ее математической модели являются функциями внешних (экзогенных) возмущений и если последние нестационарные – сложными функциями от времени. Такие системы и их математические модели называются экзогенными параметрическими системами [5–14]. Далее рассматриваем экзогенные параметрические системы с сосредоточенными параметрами. Из этих предварительных замечаний можно сделать следующий вывод: как только удается записать явный вид *S*-матрицы системы, так сразу изучение ее эволюции во времени сводится к получению выходного сигнала путем воздействия на входной сигнал *S*-матрицей в соответствии с соотношением (1) или, что то же самое, – (2). Поэтому задача построения *S*-матрицы системы может быть названа основной задачей математического моделирования экзогенных параметрических систем.

Несмотря на то что исследование эволюции системы, основанное на представлении (2), весьма удобно и прозрачно, оно применяется на практике редко, так как определить явный вид *S*-матрицы системы непросто. Поэтому для исследования эволюции во времени непрерывной многомерной системы с сосредоточенными параметрами применяется другой метод, основанный на математическом моделировании эволюции предметной системы системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе показано, что при некоторых предположениях этот метод позволяет определить также и явный вид *S*-матрицы исследуемой системы.

В качестве примера напомним, что в рамках динамической модели Леонтьева с непрерывным временем эволюция идеальной производственно-сбытовой (экономической) системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [15, 16] с постоянными коэффициентами

$$I\frac{d}{dt}\left|Y\right\rangle = \Phi^{-1}\left(I-A\right)\left|Y\right\rangle - \Phi^{-1}\left|X\right\rangle, \quad (3)$$

где A – матрица прямых материальных затрат; Φ – матрица коэффициентов вложений или коэффициентов приростной фондоемкости; I – единичная матрица, вектор-столбец;

$$\left|Y(t)\right\rangle = \left(y^1(t) \quad y^2(t) \quad \ldots \quad y^n(t)\right)^T -$$

n-мерный вектор-столбец конечной продукции каждой из n отраслей производства, а

$$\left|X(t)\right\rangle = \left(x^1(t) \quad x^2(t) \quad \ldots \quad x^n(t)\right)^T -$$

n-мерный вектор-столбец входных воздействий на систему.

Экономический смысл элементов указанных матриц следующий. Элемент a_j^i матрицы A – коэффициент прямых материальных затрат, показывает, какое количество продукции i-й отрасли производства необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли производства. Элемент φ_j^i матрицы Φ – коэффициент приростной фондоемкости, показывает, какое количество продукции i-й отрасли должно быть вложено в j-ю отрасль для увеличения производственной мощности j-й отрасли на единицу продукции.

Вводя обозначения

$$\left| f(t) \right\rangle = -\Phi^{-1} \left| X \right\rangle, P = \Phi^{-1} (I - A),$$

систему уравнений (3) запишем в виде

$$I \frac{d}{dt} \left| y(t) \right\rangle + P \left| y(t) \right\rangle = \left| f(t) \right\rangle. \qquad (4)$$

Добавляя к системе уравнений (4) начальные условия

$$\left| y(t_0) \right\rangle = \left| y_0 \right\rangle, \qquad (5)$$

видим, что динамика многомерной идеальной экономической системы описывается задачей Коши (4)–(5).

Подчеркнем, что математическая модель Леонтьева является идеальной, т. е. линейной, причем коэффициенты прямых материальных затрат и коэффициенты приростной фондоемкости считаются постоянными в течение всего изучаемого периода времени. Внешние возмущения в этой модели не учитываются, что является, однако, весьма грубым приближением к реальности.

Действительно, прямые материальные затраты складываются из объема производства товарной продукции, структуры товарной продукции, уровня затрат на единицу продукции (расход сырья и материалов на единицу продукции и средней стоимости единицы сырья и материалов), а также удельной зарплаты на единицу продукции (трудоемкость продукции и уровень оплаты труда за 1 чел./ч). Расход материалов на единицу продукции зависит от качества сырья и материалов, замены одного вида материала другим, изменения рецептуры сырья, техники, технологии и организации производства, квалификации работников, отходов сырья и других параметров. Вполне очевидно, что все эти факторы варьируются во времени. Уровень средней цены материалов зависит от рынков сырья, отпускной цены поставщика, внутригрупповой структуры материальных ресурсов, уровня транспортно-заготовительных расходов, качества сырья и т. д. Эти факторы также подвержены изменениям во времени.

Таким образом, видно, что элементы матрицы P – структурные параметры системы – являются сложными функциями времени. Причем видно, что функциональные зависимости элементов матрицы P от времени опосредованы и реализуются через достаточно большое число внешних параметров системы. В качестве таких параметров можно назвать среднюю стоимость сырья, удельную зарплату на единицу произведенной продукции, качество сырья, изменение рецептуры сырья, применяемую в процессе производства технику, технологию и организацию производства, квалификацию работников, стоимость утилизации отходов сырья и другие параметры. Привести полный перечень параметров вряд ли возможно. Если учитывается известное конечное число m таких параметров, то формально можно записать, что

$$p_j^i = p_j^i \left(c_1(t), c_2(t), \ldots, c_m(t), t \right),$$

т. е. получаем сложные функциональные зависимости структурных параметров от времени. Так как число внешних параметров $c_k = c_k(t)$ для системы неопределенно и зависит от степени детальности исследования системы, то можно принять, что зависимости структурных параметров системы – элементов матрицы P – от времени задано явно, что значительно упростит форму записи дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы.

Таким образом, процесс эволюции многомерной экзогенной параметрической экономической системы (с сосредоточенными параметрами) моделируется неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида (4) с зависящими от времени коэффициентами

$$I\frac{d}{dt}\left|y(t)\right\rangle + P(t)\left|y(t)\right\rangle = \left|f(t)\right\rangle, \qquad (6)$$

где I – единичная матрица; $P(t)$ – функциональная матрица коэффициентов; $\left|f(t)\right\rangle$, $\left|y(t)\right\rangle$ соответственно n-мерные векторы внешних воздействий и отклика системы.

Основная задача для системы ОДУ (6) – это задача Коши с начальными условиями

$$\left|y(t_0)\right\rangle = \left|y_0\right\rangle. \qquad (7)$$

Описание динамики экзогенной параметрической системы с сосредоточенными параметрами эквивалентным интегральным эволюционным уравнением. Примем в качестве «разумного предположения», что внешние воздействия на систему имеют характер возмущений. В рамках этого предположения коэффициенты модельной системы дифференциальных уравнений (6) в окрестности начального значения t_0 можно считать функциями класса N [17], что характерно для систем со слабо зависящими от времени параметрами. Функциональную матрицу коэффициентов $P(t)$ системы (6) в окрестности значения $t_0 \in (a,b)$ представим формулой Тейлора [18]:

$$P(t) = A + \sum_{k=1}^{m}\frac{d^k P(t_0)}{dt^k}\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \left.\frac{d^{m+1}P(\xi)}{dt^{m+1}}\right|_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (6), приведем его к виду

$$I\frac{d}{dt}\left|y(t)\right\rangle + A\left|y(t)\right\rangle = \Delta P(t)\left|y(t)\right\rangle + \left|f(t)\right\rangle, \qquad (9)$$

где

$$\Delta P(t) = -\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{d^k P(t_0)}{dt^k}\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \left.\frac{d^{m+1}P(\xi)}{dt^{m+1}}\right|_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}\right].$$

Относя вектор $\Delta P(t)\left|y(t)\right\rangle$ к вторичным источникам и записывая решение векторного уравнения (9) по принципу Дюамеля [1], получаем интегральное уравнение следующего вида

$$\left|y(t)\right\rangle = G(t,t_0)\left|y_0\right\rangle + \left|y_0(t)\right\rangle + \int_{t_0}^{t} G(t,s)\Delta P(s)\left|y(s)\right\rangle ds, \qquad (10)$$

эквивалентное возмущенной задаче Коши (7), (9). Функция Грина $G(t,s)$ для начальных условий является решением задачи Коши специального вида [1]:

$$\left(I\frac{d}{dt} + A\right)Z(t) = O, Z(t_0) = I. \qquad (11)$$

Система, динамика которой определена задачей Коши (11), называется фоновой системой.

Утверждение 1. *Пусть на компактном промежутке $[a,b]$ изменения переменной t поставлена задача Коши (6), (7). Предположим, что элементы матрицы коэффициентов $P(t)$ векторного уравне-*

ния (6) непрерывны на промежутке $[a, b]$ и дифференцируемы m + 1 раз на соответствующем открытом промежутке (a, b). Тогда, если известна функция Грина – решение задачи Коши (6), (7), то существует окрестность $U(t_0)$ произвольного начального значения $t_0 \in (a, b)$ такая, что при любых $t \in U(t_0) \cap (a, b)$, удовлетворяющих условию $t > t_0$, возмущенная задача Коши (7), (9) сводится к эквивалентному векторному интегральному уравнению Вольтерра (10).

Уравнение (10) в условиях утверждения 1 является точным. Однако осуществить численное моделирование на основе этого уравнения сложно из-за наличия в интегральном члене функции, которая должна вычисляется в точке $t_0 < \xi < t$. Если предположить, что матрица коэффициентов $P(t)$ уравнения (6) является аналитической функцией и раскладывается в ряд Тейлора, то интегральное уравнение значительно упрощается [2]:

$$\left|y(t)\right\rangle = G(t, t_0)\left|y_0\right\rangle + \left|y_0(t)\right\rangle + \\ + \int_{t_0}^{t} G(t, s)\left[A - P(s)\right]\left|y(s)\right\rangle ds. \qquad (12)$$

Адекватность системы интегральных эволюционных уравнений предметной ситуации. Полагая, что матричные элементы $G_k^i(t, s)$ в верхней половине $s > t$ квадрата $a \le t, s \le b$ доопределены условием $G_k^i(t, s) \equiv 0$ ($i, k = \overline{1, n}$), перепишем векторное интегральное уравнение Вольтерра (12) в виде векторного уравнения Фредгольма

$$\left|y(t)\right\rangle = \left|y_0(t)\right\rangle + \int_a^b G(t, t_1)\Delta P(t_1)\left|y(t_1)\right\rangle dt_1,$$

$$\left|y_0(t)\right\rangle \equiv G(t, t_0)\left|y_0\right\rangle + \int_a^b ds G(t, s) f(s). \qquad (13)$$

Уравнение (13) – аналог уравнения Липмана–Швингера (УЛШ) теории рассеяния [2, 3]. Решение УЛШ (13) представляется борновским рядом, получаемым методом последовательных подстановок [19], и имеет вид:

$$\left|y(t)\right\rangle = \left|y_0(t)\right\rangle + \int_a^b G(t, t_1)\Delta P(t_1)\left|y_0(t_1)\right\rangle dt_1 + \\ + \int_a^b\int_a^b G(t, t_1)\Delta P(t_1) G(t_1, t_2)\Delta P(t_2)\left|y_0(t_2)\right\rangle dt_2 dt_1 + \dots \qquad (14)$$

Определяя матрицу взаимодействия

$$T \overset{\text{def}}{=} \int_a^b dt_1 G(t, t_1)\Delta P(t_1)[\dots] + \\ \int_a^b\int_a^b G(t, t_1)\Delta P(t_1) G(t_1, t_2)\Delta P(t_2)[\dots] dt_2 dt_1 + \dots \qquad (15)$$

и подставляя (15) в (14), получаем решение УЛШ (13) в виде

$$\left|y(t)\right\rangle = (I + T)\left|y_0(t)\right\rangle. \qquad (16)$$

Операторное соотношение (16) определяет *S*-матрицу системы в явном виде:

$$S \overset{\text{def}}{=} I + T. \qquad (17)$$

Чтобы показать, что интегральное уравнение (12), эквивалентное возмущенной задаче Коши (9), (7), описывает эволюцию во времени соответствующей линейной экзогенной параметрической системы с сосредоточенными параметрами, нужно выяснить вопрос о сходимости Борновского ряда (14) и типе этой сходимости. Тогда применимость этого уравнения для математического моделирования динамики параметрических систем будет обоснована. Нетрудно показать справедливость следующей теоремы [5].

Теорема. *Если $(\forall i, j = \overline{1, n})$ функции $\left|y(t)\right\rangle$, $\left|f(t)\right\rangle$ и матрица $\Delta P(t)$ непрерывны на компактном промежутке $[a, b]$, то ряд Борна (14) сходится на этом промежутке абсолютно и равномерно.*

Приведенная теорема в совокупности с утверждением 1 приводит к выводу об адекватности уравнения (12) моделируемой предметной ситуации [12, 14].

Утверждение 2. *Пусть эволюция многомерной параметрической системы S с сосредоточенными параметрами на промежутке времени $[a, b]$ описывается решением задачи Коши (9), (7), а эволюция фоновой системы описывается соответствующей задачей Коши (11) для уравнения с постоянными коэффициентами, и пусть элементы матрицы коэффициентов $P(t)$ уравнения (6) как функции времени непрерывны на всtм промежутке $[a, b]$ и дифференцируемы $m+1$ раз на соответствующем открытом промежутке (a, b). Тогда существует такая окрестность $U(t_0)$ произвольного начального значения времени $t_0 \in (a, b)$, что при любых $t \in U(t_0) \cap (a, b)$, таких, что $t > t_0$, динамика экзогенной параметрической системы описывается интегральным уравнением вида (12).*

Утверждение 2 конструктивно, так как итерационный алгоритм решения уравнения (12) реализуется численно намного проще, чем решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Возвращаясь к предметному смыслу изучаемой системы, из установленного соотношения (17) легко видеть, что элементы S-матрицы моделируемой экономической (производственно-сбытовой) системы, которые теперь можно назвать операторами рождения нового продукта, в рамках принятых предположений, имеют следующий явный вид

$$S_j^i(t) = \delta_j^i + T_j^i(t), \qquad (18)$$

где δ_j^i – элементы единичной матрицы (второе название δ_j^i – символ Кронекера [17]), а элементы $T_j^i(t)$ матрицы взаимодействий (15) выражаются интегро-степенными рядами следующего вида:

$$T_j^i \overset{\text{def}}{=} \int_a^b dt_1 G_k^i(t, t_1) \Delta P_j^k(t_1)[\ldots] +$$

$$+\int_a^b \int_a^b G_k^i(t, t_1) \Delta P_m^k(t_1) G_n^m(t_1, t_2) \Delta P_j^n(t_2)[\ldots] dt_2 dt_1 + \ldots. \qquad (19)$$

В заключение можно сделать следующие выводы:

1) математическая модель экономической (производственно-сбытовой) системы в виде матрично-операторного соотношения (2) установлена;

2) предложенный алгоритм нахождения операторов рождения нового продукта $S_j^i(t)$ является конструктивным в силу доказанных утверждений;

3) конкретный вид операторов рождения нового продукта должен содержать в себе все требуемые для рождения продукта операции, включая и логистические операции.

Построение математических моделей конкретных производственно-сбытовых экономических систем не являлось задачей данной статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сурнев В. Б. Математическое моделирование. Непрерывные детерминированные модели. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 689 с.

2. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 565 с.

3. Сурнев В. Б. О рассеянии упругих волн локализованной неоднородностью // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. № 2. С. 9–19.

4. Бёрке У. Пространство-время, геометрия, космология. М.: МИР, 1985. 416 с.

5. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б. Метод анализа линейной многосвязной динамической системы // Изв. вузов. Горный журнал. 2005. № 6. С. 51–58.

6. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. О решении некоторых задач динамики экономических систем методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Горный журнал. 2006. № 4. С. 105–118.

7. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. Исследование линейной динамической системы с переменными параметрами методом вторичных источников // Математическое моделирование механических явлений: материалы Всерос. науч.-техн. конф. Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2007. С. 53–56.

8. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. Математическое моделирование неидеальной линейной динамической системы с сосредоточенными параметрами // Математическое моделирование и краевые задачи: труды

Четвертой Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Самара: Изд-во Самар. техн. ун-та. 2007. Ч. 2. С. 142–145.
9. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б. О решении основных задач математического моделирования параметрических систем с сосредоточенными параметрами // Деп. в ВИНИТИ. 15.03.2010. № 161 – В. 2010. 24 с.
10. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Человечков А. И. Параметрическая модель индуктивного измерительного преобразователя // Изв. вузов. Горный журнал. 2010. № 1. С. 49–56.
11. Пяткова В. Б., Сурнев В. Б. Некоторые вопросы теории и алгоритмы численного моделирования линейных параметрических систем // Математическое моделирование механических явлений: материалы Всерос. науч.-техн. конф. Екатеринбург: ЗАО «Таймер-КЦ», 2011. С. 11–14.
12. Пяткова В. Б., Сурнев В. Б. Математическое моделирование линейных параметрических систем с сосредоточенными параметрами. Обоснование адекватности метода интегральных эволюционных уравнений физической ситуации // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Девятой Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Самара: Изд-во Самар. техн. ун-та. 2013. Ч. 3. С. 60–64.
13. Пяткова В. Б., Сурнев В. Б. Параметрическая модель индуктивного измерительного преобразователя // Математическое моделирование механических явлений: материалы науч.-техн. конф. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. С. 66–68.
14. Пяткова В. Б., Сурнев В. Б. Обоснование адекватности метода интегральных эволюционных уравнений физической ситуации // Изв. УГГУ. 2013. Вып. 1 (29). С. 3–7.
15. Колемаев В. А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2005. 399 с.
16. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. М.: ЮНИТИ, 2005. 295 с.
17. Сурнев В. Б. Дифференциальная геометрия. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. 186 с.
18. Сурнев В. Б. Основы высшей математики. Ч. 3. Анализ функций нескольких действительных переменных. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. 296 с.
19. Ловитт У. Б. Линейные интегральные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957. 266 с.

Поступила в редакцию 4 октября 2013 г.

Сурнев Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики. 620144, г. Екатеринбург, ГСП-126, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: sournev@yandex.ru