УДК 517.39

ОБОСНОВАНИЕ АДЕКВАТНОСТИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Б. Пяткова, В. Б. Сурнев

В статье проведено обоснование адекватности общефизическим представлениям предложенного в предыдущих работах авторов метода исследования линейных экзогенных параметрических систем с сосредоточенными параметрами.

Ключевые слова: *математическое моделирование; задача Коши; линейные экзогенные параметрические системы с сосредоточенными параметрами.*

В предыдущих работах авторов [1–6] предложен метод математического моделирования линейных непрерывных экзогенных параметрических систем с сосредоточенными параметрами, основанный на сведении первой основной задачи для указанных систем – задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику модели предметной системы, – к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Предложенный метод носил эвристический характер. Для строгого обоснования метода нужно доказать его адекватность рассматриваемой физической ситуации. Последнее подразумевает выполнение следующей программы действий:

– строгий вывод системы интегральных эволюционных уравнений;

– строгое обоснование метода решения полученной системы интегральных уравнений, адекватного рассматриваемой физической ситуации.

Описание динамики экзогенной параметрической системы с сосредоточенными параметрами эквивалентным интегральным эволюционным уравнением. На первом этапе предположим, что эволюция математической модели многомерной экзогенной параметрической системы с сосредоточенными параметрами описывается неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с зависящими от времени коэффициентами:

$$I\frac{d}{dt}\left|y(t)\right\rangle + P(t)\left|y(t)\right\rangle = \left|f(t)\right\rangle, \qquad (1)$$

где введены обозначения для векторов-столбцов переменных и матриц коэффициентов системы уравнений, а именно:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & a_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix},$$

$$\left|y(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}, \quad \left|f(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Основная задача для рассматриваемой системы ОДУ (1) и, следовательно, для эволюции модели предметной системы – это задача Коши для модельной системы уравнений (1) с начальными условиями

$$\left| y(t_0) \right\rangle = \left| y_0 \right\rangle. \qquad (2)$$

Предположим, что коэффициенты модельной системы дифференциальных уравнений (1) в окрестности начального значения t_0 являются функциями класса *N*, что несколько сузит класс рассматриваемых систем до систем со слабо зависящими от времени параметрами. Функциональную матрицу коэффициентов *P(t)* системы (1) в окрестности значения $t_0 \in (a, b)$ представим формулой Тейлора:

$$P(t) = A + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k P(t_0)}{dt^k} \cdot \frac{(t-t_0)^k}{k!} + \\ + \frac{d^{m+1} P(\xi)}{dt^{m+1}}\Big|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}, \qquad (3)$$

$$A \equiv P(t_0), \quad \frac{d^k P(t)}{dt^k}\Big|_{t-t_0} \equiv \frac{d^k P(t_0)}{dt^k}.$$

Подставляя (3) в уравнение (1), получаем

$$I \frac{d}{dt} \left| y(t) \right\rangle + A(t) \left| y(t) \right\rangle = \\ = \Delta P(t) \left| y(t) \right\rangle + \left| f(t) \right\rangle, \qquad (4)$$

где

$$\Delta P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left[A - P(t) \right] = \\ = -\left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{d^k P(t_0)}{dt^k} \dfrac{(t-t_0)^k}{k!} + \\ + \dfrac{d^{m+1} P(\xi)}{dt^{m+1}}\Big|_{t=t_0} \dfrac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!} \end{array} \right].$$

Характеризуя вектор

$$\Delta P(t) \left| y(t) \right\rangle = -\left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{d^k P(t_0)}{dt^k} \cdot \dfrac{(t-t_0)^k}{k!} + \\ \dfrac{d^{m+1} P(\xi)}{dt^{m+1}}\Big|_{t=t_0} \dfrac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!} \end{array} \right] \left| y(t) \right\rangle$$

как вектор вторичных источников и записывая решение векторного дифференциального уравнения (5) по принципу Дюамеля, получаем интегральное уравнение следующего вида:

$$\left| y(t) \right\rangle = G(t, t_0) \left| y_0 \right\rangle + \left| y_0(t) \right\rangle + \\ + \int_{t_0}^{t} G(t, s) \Delta P(s) \left| y(s) \right\rangle ds, \qquad (5)$$

где вектор

$$\left| y_0(t) \right\rangle = \int_{t_0}^{t} ds G(t, s) f(s).$$

Здесь функция Грина для начальных условий $G(t-s)$ является решением задачи Коши специального вида [10]:

$$\left(I \frac{d}{dt} + A \right) Z(t) = 0, \quad Z(t_0) = I. \qquad (6)$$

Система, динамика которой определяется задачей Коши (6), называется фоновой системой. Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 1. *Пусть на компактном промежутке [a, b] изменения переменной t поставлена задача Коши (1), (2). Предположим, что элементы матрицы коэффициентов P(t) векторного уравнения (1) непрерывны на промежутке [a, b] и дифференцируемы m + 1 раз на соответствующем открытом промежутке (a, b). Тогда если известна функция Грина – решение задачи Коши (1), (2), то существует окрестность U(t) произвольного начального значения* t_0 *(a, b) такая, что при любых удовлетворяющих условию* $t > t_0$, *задача Коши (1), (2) сводится к эквивалентному векторному интегральному уравнению Вольтерра (5).*

Уравнение (5) в условиях *утверждения 1* является точным. Однако осуществить численное моделирование на основе этого уравнения достаточно сложно, так как интегральный член в уравнении (5) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t} G(t, s) \Delta P(s) \left| y(s) \right\rangle ds = \\ = -\int_{t_0}^{t} G(t, s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k P(t_0)}{dt^k} \cdot \frac{(s-t_0)^k}{k!} ds - \\ - \int_{t_0}^{t} G(t, s) \frac{d^{m+1} P(\xi)}{dt^{m+1}} \cdot \frac{(s-t_0)^{m+1}}{(m+1)!} ds,$$

где во втором слагаемом подынтегральная функция должна вычисляться в точке , удовлетворяющей условию $t_0 < \xi < t$. Поэтому на практике достаточно предположить, что матрица коэффициентов *P(t)* уравнения (1) является аналитической функцией и, следовательно, может быть разложена в ряд Тейлора. Тогда второе слагаемое в интегральном члене уравнения (5) обращается в нуль, и мы приходим к интегральному уравнению [8]

$$\left|y(t)\right\rangle = G(t, t_0)\left|y_0\right\rangle + \left|y_0(t)\right\rangle + \\ + \int_{t_0}^{t} G(t, s)\Delta P(s)\left|y(s)\right\rangle ds, \tag{7}$$

где интегральный член имеет вид

$$\int_{t_0}^{t} G(t, s)\Delta P(s)\left|y(s)\right\rangle ds = \\ = -\int_{t_0}^{t} G(t, s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k P(t_0)}{dt^k}\cdot\frac{(s-t_0)^k}{k!}ds = \\ = \int_{t_0}^{t} G(t, s)\left[A - P(s)\right]ds.$$

Получение интегральных эволюционных уравнений (5) или (7) завершает первый этап действий в программе обоснования адекватности рассматриваемого метода физической ситуации.

Решение системы интегральных эволюционных уравнений методом подстановок. Перейдем к выполнению второго этапа анонсированной программы действий. Перепишем векторное интегральное уравнение Вольтерра (7) в виде векторного интегрального уравнения Фредгольма

$$\left|y(t)\right\rangle = \left|y_0(t)\right\rangle + \int_{a}^{b} G(t, t_1)\Delta P(t_1)\left|y(t_1)\right\rangle dt_1, \tag{8}$$

доопределяя матричные элементы $G_k^i(t, s)$ в верхней половине $s > t$ квадрата $a \le t, s \le b$ условием $\left(\forall i, k = \overline{1, n}\right) G_k^i(t, s) \equiv 0$. В (8) введено обозначение $\left|y_0(t)\right\rangle \equiv G(t, t_0)\left|y_0\right\rangle + \int_a^b ds G(t, s) f(s)$.

Уравнение (8) по аналогии с теорией рассеяния будем называть уравнением Липмана-Швингера, или сокращенно УЛШ [9, 10]. Решение УЛШ (8) можно представить в виде борновского ряда, который получается методом последовательных подстановок. Для получения этого ряда запишем (8) для различных моментов времени $t_1, t_2, t_3, \ldots \in [a, b]$:

$$\left|y(t_1)\right\rangle = \left|y_0(t_1)\right\rangle + \int_a^b G(t_1, t_2)\Delta P(t_2)\left|y(t_2)\right\rangle dt_2,$$

$$\left|y(t_2)\right\rangle = \left|y_0(t_2)\right\rangle + \int_a^b G(t_2, t_3)\Delta P(t_3)\left|y(t_3)\right\rangle dt_3,$$

....

Совершая бесконечную подстановку в (8), получаем решение УЛШ в виде искомого ряда:

$$\left|y(t)\right\rangle = \left|y_0(t)\right\rangle + \int_a^b G(t, t_1)\Delta P(t_1)\left|y_0(t_1)\right\rangle dt_1 + \\ + \int_a^b\int_a^b G(t, t_1)\Delta P(t_1)G(t_1, t_2)\Delta P(t_2)\left|y_0(t_2)\right\rangle dt_2 dt_1 + \\ + \int_a^b\int_a^b\int_a^b \begin{matrix} G(t, t_1)\Delta P(t_1)G(t_1, t_2)\Delta P(t_2) \\ G(t_2, t_3)\Delta P(t_3)\left|y_0(t_3)\right\rangle dt_3 dt_2 dt_1 \end{matrix} + \ldots \tag{9}$$

Меняя в (9) обозначение переменной интегрирования, определим матрицу взаимодействия

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dt_1 G(t, t_1)\Delta P(t_1)[\ldots] + \\ + \int_a^b\int_a^b dt_1 dt_2 G(t, t_2)\Delta P(t_2)G(t_2, t_1)\Delta P(t_1)[\ldots] + \\ + \int_a^b\int_a^b\int_a^b \begin{matrix} dt_1 dt_2 dt_3 G(t, t_3)\Delta P(t_3)G(t_3, t_2) \\ \Delta P(t_2)G(t_2, t_1)\Delta P(t_1)[\ldots] \end{matrix} + \ldots \tag{10}$$

Подставляя (13) в (12), получаем решение УЛШ (11) в виде

$$\left|y(t)\right\rangle = (I + T)\left|y_0(t)\right\rangle. \tag{11}$$

Операторное соотношение (1.4.10) определяет *S*-матрицу системы

$$S \stackrel{\text{def}}{=} I + T, \tag{12}$$

в явном виде – матричным интегро-степенным рядом.

Метод решения первой основной задачи математического моделирования для линейной параметрической системы с сосредоточенными параметрами может считаться обоснованным, если будет показано, что интегральное уравнение (8), эквивалентное задаче Коши (1), (2), описывает эволюцию во времени соответствующей линейной параметрической системы с сосредоточенными параметрами. Для этого следует выяснить вопрос о сходимости борновского ряда (9) и типе этой сходимости.

Утверждение 2. *Если* $\left(\forall i,\, j=\overline{1,n}\right)$ *функции* $\left|y(t)\right\rangle, \left|f(t)\right\rangle$ *и матрица* $P(t)$ *непрерывны на компактном промежутке [a, b], то ряд Борна (9) сходится на этом промежутке абсолютно и равномерно.*

Доказательство этого утверждения, являясь стандартным для теории линейных интегральных уравнений, многократно опубликовано, например в классической работе [9]. По этой причине мы приведем краткую схему доказательства *утверждения 2*, имея в виду исключительно полноту и корректность выполнения анонсированной ранее программы обоснования адекватности предлагаемого метода и предметной физической ситуации.

Доказательство. Матричная функция Грина уравнения (8) ограничена на $[a, b]$, а вектор-функция $\left|f(t)\right\rangle$ непрерывна на $[a, b]$, следовательно, например, по норме

$$\left\|\left|y\right\rangle\right\| = \max_{t\in[a,b]}\left|y^j\right|_{j=\overline{1,n}}$$

справедливы оценки

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} G_k^i\left(t,t_1\right)\Delta p_j^k\left(t_1\right)\right\| \le M,\ \left\|y^j\left(t_1\right)\right\| \le N,$$

откуда для общего члена $V_j^i\left(t,n\right)$ ряда (9) имеем

$$\left\|V_j^i\left(t,n\right)\right\| \le N\frac{\left[M\left(b-a\right)\right]^n}{n!}.$$

Ряд с положительным общим членом

$$N\,\frac{\left[M\,\left(b-a\right)\right]^n}{n\,!}$$

сходится при любых числах M, N или $b - a$ и является мажорантой функционального ряда (9). Поэтому функциональный ряд (9) сходится абсолютно и равномерно на всем промежутке времени $[a, b]$.

Равномерная сходимость ряда последовательных приближений позволяет утверждать, что предлагаемый метод описания параметрических систем адекватен физической ситуации. Сведем воедино результаты *утверждений 1* и *2*.

Утверждение 3. Пусть эволюция многомерной параметрической системы S с сосредоточенными параметрами на промежутке времени [a, b] описывается решением задачи Коши (1), (2), а эволюция фоновой системы описывается соответствующей задачей Коши (6) для уравнения с постоянными коэффициентами, и пусть элементы матрицы коэффициентов P(t) уравнения (1) как функции времени непрерывны на всем промежутке [a, b] и дифференцируемы m + 1 раз на соответствующем открытом промежутке (a, b). Тогда существует такая окрестность $U(t_0)$ *произвольного начального значения времени* t_0 *(a, b), что при любых* $t\in U\left(t_0\right)\bigcap\left(a,b\right)$, *таких, что* $t > t_0$, *динамика системы может быть описана интегральным уравнением вида (7) или (8).*

Утверждение 3 завершает программу обоснования адекватности метода описания эволюции линейной параметрической системы с сосредоточенными параметрами интегральными эволюционными уравнениями Вольтерра.

Утверждение 3 является конструктивным, так как позволяет описать эволюцию во времени линейной параметрической системы с сосредоточенными параметрами в общем случае векторным интегральным эволюционным уравнением Вольтерра второго рода, алгоритм численного решения которого реализуется численно намного проще, чем решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. Метод анализа линейной многосвязной динамической системы // Изв. вузов. Горный журнал. 2005. № 6. С. 51-58.

2. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. О решении некоторых задач динамики экономических систем методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Горный журнал. 2006. № 1. С. 85-94.

3. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. Исследование линейной динамической системы с переменными параметрами методом вторичных источников // Математическое моделирование механических явлений: материалы Всерос. науч.-техн. конф. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. С. 53-56.

4. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. Математическое моделирование неидеальной линейной динамической системы с сосредоточенными параметрами // Математическое моделирование и краевые задачи: труды четвертой Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Самара: Изд-во Самарск. техн. ун-та. 2007. Ч. 2. С. 142-145.

5. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б., Пятков А. И. Метод исследования динамики многомерной экономической системы // Вестник ДИТУД. 2007. № 2 (32). С. 72-76.

6. Сурнев В. Б., Пяткова В. Б. О решении основных задач математического моделирования параметрических систем с сосредоточенными параметрами // Деп. в ВИНИТИ 15.03.2010, № 161. 2010. 24 с.

7. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 565 с.

8. Сурнев В. Б. О рассеянии упругих волн локализованной неоднородностью // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. № 2. С. 9-19.

9. Ловитт У. Б. Линейные интегральные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957. 266 с.

10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2013 г.

Сурнев Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: sournev@yandex.ru.

Пяткова Вера Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: fgg.mt@m.ursmu.ru.